Al fine di evitare interpretazioni fuorvianti del quesito, sul forum di discussione è stata chiesta una formulazione non ambigua dello stesso; per completezza la riporto:
"Consideriamo le distanze X_i per $i > 0$ delle gocce dal centro del tavolino, ordinate in ordine crescente, quindi X_1 è la goccia più vicina al centro del tavolino, X_0 identifica la distanza del centro del tavolino con sé stesso. Considerando che:

$Y_1 = X_1 - X_0$

$Y_2 = X_2 - X_1$

Calcolare:

$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$

come distribuzione di probabilità".

Ho tenuto buone le soluzioni che davano solo le probabilità marginali e non la congiunta.

Soluzione

Immaginiamo di suddividere il tavolino in corone circolari di spessore infinitesimo. Poiché la pioggia è caduta uniformemente dappertutto con densità superficiale δ, il numero di gocce cadute in una corona circolare a distanza r dal centro del tavolino sarà una variabile aleatoria di Poisson con tasso $\lambda = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\delta \cdot 2\pi r \cdot \Delta r}{\Delta r} = \delta \cdot 2\pi r$. Passando dalla corona circolare al tavolino intero, si può immaginare il tasso come funzione della distanza dal raggio del tavolino: $\lambda(r) = \delta \cdot 2\pi r$; è comodo definire un tasso "cumulato", cioè un tasso che tenga conto delle gocce cadute a partire dal centro fino ad una distanza r dal centro: $\Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)dt$; quindi la ddp del numero di gocce cadute a partire dal centro fino a distanza r è:

$$P[N(r) = k] = \frac{\Lambda(r)^k}{k!} e^{-\Lambda(r)} \quad k \geq 0$$

La probabilità richiesta equivale a chiedersi quale sia la probabilità che in $[y_1, y_1 + \Delta y_1]$ cada una goccia, che in $[y_1 + y_2, y_1 + y_2 + \Delta y_2]$ cada una goccia e che in $[0, y_1 + y_2]$ non cada alcuna goccia; poiché si ha indipendenza statistica per ciò che accade in intervalli disgiunti, si avrà:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\Delta y_1 \Delta y_2 = P[N(0, y_1 + y_2) = 0] \cdot P[N(y_1, y_1 + \Delta y_1) = 1] \cdot P[N(y_1 + y_2, y_1 + y_2 + \Delta y_2) = 1] =$$
$$= e^{-\int_0^{y_1+y_2} \delta \cdot 2\pi r \cdot dr} \cdot \lambda(y_1)\Delta y_1 \cdot \lambda(y_1 + y_2)\Delta y_2$$

e quindi:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = (2\pi\delta)^2 y_1(y_1 + y_2)e^{-\pi\delta(y_1+y_2)^2}$$

Le marginali possono ricavarsi come:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{Y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2 = 2\pi\delta \cdot y_1 e^{-\pi\delta \cdot y_1^2}$$
$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{Y_1} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_1 = 2\pi^2\delta^2 \cdot y_2^3 e^{-\pi\delta \cdot y_2^2}$$

Luca B.