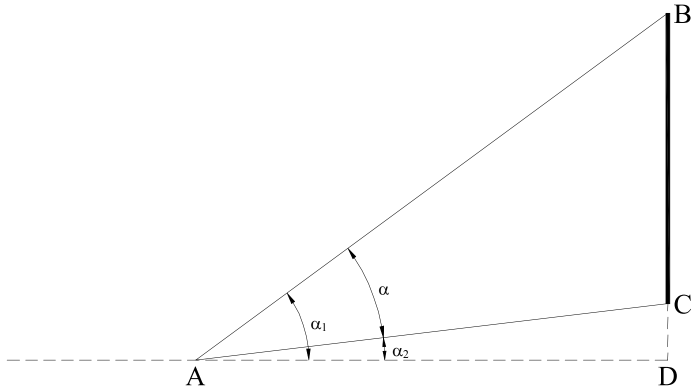
La Gioconda

L'orlo inferiore del celebre dipinto "La Gioconda" (77x53 cm) è posto a 15 cm al di sopra dell'occhio di un visitatore. Supponendo che la migliore visione del dipinto si abbia quando l'angolo sotteso dal quadro è massimo, a quale distanza dalla parete si deve mettere il visitatore?

Soluzione

Consideriamo il piano perpendicolare alla parete dove è appeso il quadro e passante per il centro dello stesso.



Con A si indica la posizione dell'occhio dell'osservatore (incognita), mentre con B e C l'orlo superiore e l'orlo inferiore del quadro. Si ha

$$AD = x$$

$$BC = H = 77\ cm$$

$$CD = h = 15\ cm$$

$$BD = H + h = 92\ cm$$

Dalla figura emerge che l'angolo sotto cui viene visto il quadro è

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Poiché si ha

$$\alpha_1 = \arctan\frac{BD}{AD} = \arctan\frac{H+h}{x}$$

$$\alpha_2 = \arctan\frac{CD}{AD} = \arctan\frac{h}{x}$$

otteniamo

$$\alpha(x) = \alpha_1 - \alpha_2 = \arctan\frac{H+h}{x} - \arctan\frac{h}{x}$$

Per determinare il valore massimo di α calcoliamo la derivata prima della funzione $\alpha(x)$

$$\alpha'(x) = D\left(\arctan\frac{H+h}{x} - \arctan\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{H+h}{x}\right)^2}\left(-\frac{H+h}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}\left(-\frac{h}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+\frac{(H+h)^2}{x^2}}\frac{H+h}{x^2} + \frac{1}{1+\frac{h^2}{x^2}}\frac{h}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2+(H+h)^2}\frac{H+h}{x^2} + \frac{x^2}{x^2+h^2}\frac{h}{x^2} =$$

$$= \frac{h}{x^2+h^2} - \frac{H+h}{x^2+(H+h)^2}$$

semplificando otteniamo

$$\alpha'(x) = \frac{h}{x^2+h^2} - \frac{H+h}{x^2+(H+h)^2} = \frac{h\left[x^2+(H+h)^2\right]-(H+h)\left(x^2+h^2\right)}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]} =$$

$$= \frac{hx^2+h(H+h)^2-(H+h)x^2-(H+h)h^2}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]} = \frac{(h-H+h)x^2+h(H+h)(H+h-h)}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]} =$$

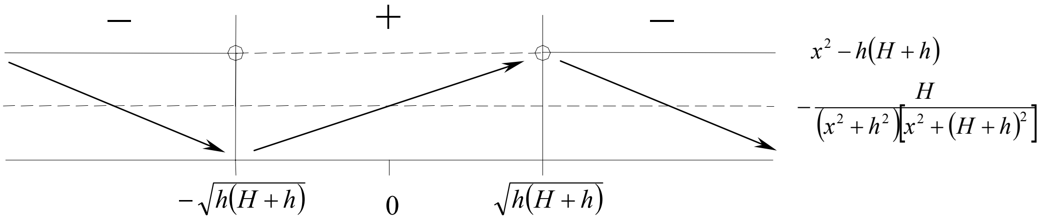
$$= \frac{-Hx^2+hH(H+h)}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]} = -\frac{H\left[x^2-h(H+h)\right]}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]}$$

Determiniamo i valori di x per cui la derivata prima è nulla

$$\alpha'(x) = -\frac{H\left[x^2-h(H+h)\right]}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2-h(H+h)=0$$

da cui $x = \pm\sqrt{h(H+h)}$

Si ottengono due soluzioni opposte corrispondenti a due punti simmetrici rispetto alla retta BC. Osserviamo che il segno di $\alpha'(x)$ dipende dal segno di $x^2-h(H+h)$ in quanto il termine $-\frac{H}{\left(x^2+h^2\right)\left[x^2+(H+h)^2\right]}$ è sempre negativo per ogni valore di x.



Dal grafico si deduce quindi che il punto $x=\sqrt{h(H+h)}$ è un punto di massimo.

La distanza dalla parete alla quale si deve mettere il visitatore è dunque

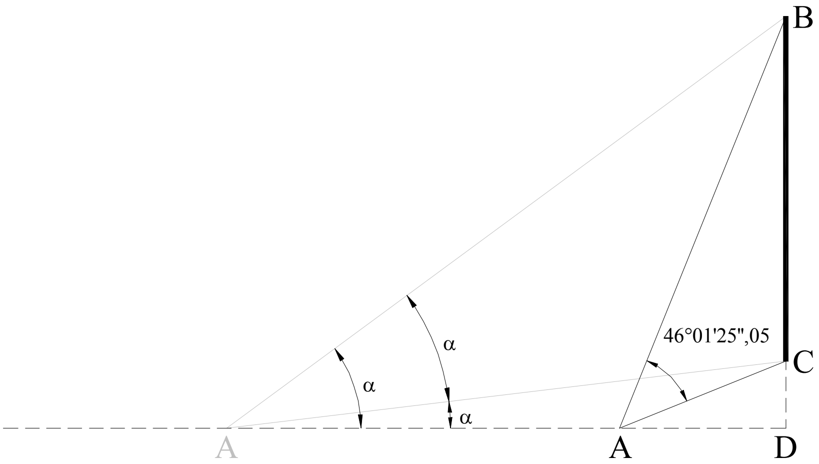
$$x=\sqrt{h(H+h)}=\sqrt{15(77+15)}\ cm=\sqrt{15\cdot 92}\ cm=2\sqrt{345}\ cm=37.1484\ cm$$

L'angolo sotto cui viene visto il dipinto è

$$\alpha(x)=\arctan\frac{H+h}{x}-\arctan\frac{h}{x}=\arctan\frac{92}{2\sqrt{345}}-\arctan\frac{15}{2\sqrt{345}}=$$

$$=\arctan\frac{46}{\sqrt{345}}-\arctan\frac{15}{2\sqrt{345}}=\arctan 2\sqrt{\frac{23}{15}}-\arctan\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{23}}=0.80326379^{\text{rad}}$$

$$=46°01'25'',0493$$



Francesco Vinciprova