MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

• Numero 9 – Maggio 2009 •

Anniebee – *Green dice*
http://www.flickr.com/photos/anniebee/6395800/

TRASFORMAZIONI DI UN FELINO – FELIX KLEIN E IL PROGRAMMA DI ERLANGEN – DADI DA GIOCO E POLIEDRI REGOLARI – LE STRUTTURE DELLA MATEMATICA – ARMONIE MATEMATICHE – DATAMINING – COORDINATE GEOGRAFICHE – MATEMATICA E ARTE

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alla sue applicazioni in fisica, ingegneria, economia ed altri campi.
Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.
Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.
In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore. È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche sostanziali che devono essere fatte dall'autore.
I contributi devono essere inviati in forma esclusivamente elettronica al direttore responsabile.
Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .rtf o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor o MathType o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.
Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail, CV sintetico (100-200 parole).
L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.
I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo [3].
Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.
I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.
Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione. La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli.
Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE
Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006
al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Hanno collaborato a questo numero
Antonio Bernardo, Ivano Bilotti, Nicola Chiriano, Giuseppe De Cecco, Giuseppe di Saverio, Luca Francesca, Michele T. Mazzucato, Gaetano Zazzaro.

Progetto grafico
Anna Gangale

SOMMARIO

EDITORIALE

La copertina di questo numero è dedicata ai dadi da gioco, oramai ne esistono di tanti tipi. l'articolo di Giuseppe De Cecco è infatti dedicato ai poliedri regolari e ai possibili dadi da gioco, cioè ai poliedri probabilisticamente regolari. Nicola Chiriano ci presenta un'esperienza didattica sulle trasformazioni geometriche nel piano, in particolare sulle trasformazioni del gatto Arnol'd ormai abituato a essere deformato in ogni direzione. Io ho ripreso un mio vecchio articolo sul Programma di Erlangen di Felix Klein, a mio avviso sempre attuale nella didattica della matematica; l'articolo era stato pubblicato in un volumetto sul Programma di Erlangen, edito nel 1998 dalla Editrice La Scuola. Luca Francesca ci descrive il fascino delle strutture che ampliano gradualmente la linea d'orizzonte delle conoscenze matematiche. Ivano Bilotti ci parla di rapporti armonici e di musica. Anche Giuseppe Di Saverio riprende il tema del rapporto tra la matematica e l'arte, la poesia in particolare. Michele Mazzucato ci parla di topografia pratica, dei problemi legati alla valutazione delle coordinate geografiche di un qualsiasi luogo del globo terrestre.

Antonio Bernardo

107. "Affelinità" nel piano

di Nicola Chiriano[1]

1 Premessa

Nel curricolo di Matematica al Liceo Scientifico PNI, uno dei temi caratterizzanti (e più trascurati) riguarda le **trasformazioni geometriche** nel piano. Gli allievi dovrebbero apprenderne le definizioni in prima liceo, la classificazione in seconda, le equazioni in terza, la trattazione matriciale in quarta e infine, in quinta, dovrebbero saperle applicare ai grafici di funzione reale.
Essendo quindi un argomento trasversale nel tempo e nella collocazione tra varie branche della Matematica, è facile che i ragazzi possano, prima del loro insegnante, venir presto colpiti da… intolleranza per assuefazione. Occorre pertanto un'idea per renderle più *user friendly*, magari usando il PC, visto che siamo al PNI.

Il *deus ex machina* della situazione è il software open-source **Geogebra** [www.geogebra.org], usando il quale ho personalmente constatato come la mia azione didattica potesse utilmente giovarsi di ciò che i ragazzi chiamano "vedere a cosa serve la Matematica", un "toccare con mano" che li riempie di soddisfazione.
Ho poi chiesto aiuto al ***gatto di Arnol'd***, da sempre disponibile ed abituato ad essere deformato in ogni direzione [1]. Il matematico russo Vladimir Arnol'd usò in effetti l'immagine di un gatto per mostrare gli effetti di una *trasformazione caotica* da lui studiata: applicandola ripetutamente, il povero gatto viene tagliuzzato, arrotolato, parcellizzato, "fantasmizzato", sottoposto a penose deformazioni [2] e, solo dopo un certo numero di iterazioni, riportato allo stato (integro) iniziale.

Premetto alla nostra discussione alcuni doverosi ma brevi cenni teorici. Consiglio di approfondire il tema su alcuni validi testi scolastici come ad es. [3] o [4].

2 Definizioni e proprietà (sintesi)

Una trasformazione geometrica lineare è una corrispondenza tra i punti del piano per cui, fissato un punto $P(x,y)$, le coordinate del punto suo trasformato $P'(x',y')$ sono in generale della forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

o, usando le matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ovvero $\underline{v}' = A \cdot \underline{v} + \underline{t}$, dove A è la matrice associata alla trasformazione, $\underline{v}' \equiv \overrightarrow{OP'}$ è il trasformato di $\underline{v} \equiv \overrightarrow{OP}$ tramite A e $\underline{t}$ è un vettore di traslazione. Indicheremo con A indifferentemente la trasformazione (1) o la matrice ad essa associata.

Senza perdere di generalità, ci limitiamo a trattare il solo caso in cui $\underline{t} \equiv \underline{0}$: infatti, in forma compatta

$$\underline{v}' = A \cdot \underline{v} + \underline{t} \Leftrightarrow \underline{v}' - \underline{t} = A \cdot \underline{v} \Leftrightarrow \underline{w} = A \cdot \underline{v}$$

ossia il sistema (1) assume la forma

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Si può verificare come la **composizione** tra due trasformazioni A e B sia caratterizzata dalla matrice prodotto $B \cdot A$: se $P \overset{A}{\mapsto} P' \overset{B}{\mapsto} P''$, allora $P \overset{B\cdot A}{\mapsto} P''$.

1 Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "L. Siciliani" di Catanzaro.

Se A è biunivoca, ossia se ad ogni punto $P(x, y)$ del piano corrisponde uno e un solo trasformato $P'(x', y')$, A si chiama **affinità** del piano. In tal caso il sistema (2) ammette un'unica soluzione, ossia è determinato. Essendo $|A| \neq 0$, A è invertibile. La sua inversa è data da:

(3) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

In definitiva, per $|A| \neq 0$, si ha:

$$\underline{v}' = A \cdot \underline{v} \iff \underline{v} = A^{-1} \cdot \underline{v}'.$$

Indicheremo con A^{-1} sia la trasformazione inversa, anch'essa un'affinità, che la matrice ad essa associata.

Riassumendo:
A è un'affinità $\Leftrightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$
e quindi
Affinità $\Leftrightarrow$ Trasformazioni lineari invertibili

3 Invarianti delle affinità

In omaggio a Felix Klein e al suo programma di Erlangen (1872), accenniamo al fatto che le affinità, e le trasformazioni in genere, possano essere classificate in *gruppi* sulla base dei loro **invarianti**, ossia delle proprietà del piano che non subiscono modifiche dopo aver applicato la trasformazione.
Rimandando ad una trattazione più completa su [3] o [4], sintetizziamo tale classificazione in una tabella:

Affinità	1. allineamento punti 2. parallelismo
Similitudini	3. ampiezze angoli 4. rapporti tra segmenti
Isometrie	5. lunghezza segmenti

In particolare, appuntiamo le proprietà conseguenti al fatto che un'affinità sia una trasformazione:
lineare $\Rightarrow$ trasforma rette in rette
invertibile $\Rightarrow$ trasforma rette parallele in rette parallele

4 Alcuni esempi di affinità

Identità	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Omotetia di centro O	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Doppio stiramento	$\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto l'asse x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto l'asse y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto O	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotazione di α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Similitudine	$k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$

5 Trasformata di una curva γ

Data una curva nel piano di equazione
$$\gamma : F(x, y) = 0$$

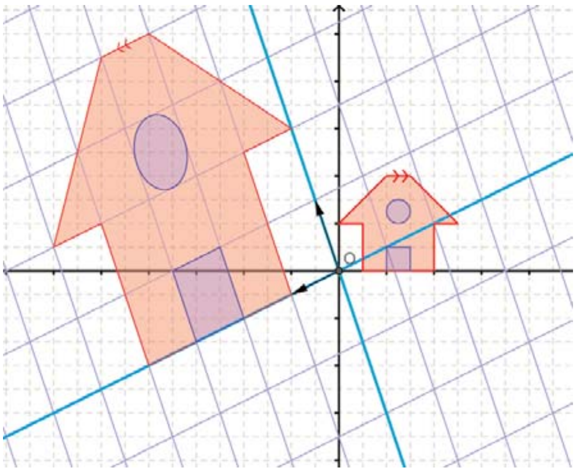
per ricavare l'equazione della sua trasformata γ' tramite A ricaviamo anzitutto x e y tramite A^{-1}:

(4) $$A^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{|A|}\left(a_{22}x' - a_{12}y'\right) \\ y = \frac{1}{|A|}\left(-a_{21}x' + a_{11}y'\right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati nell'equazione di γ si ha
$$\gamma' : F(x', y') = 0$$

6 Modifica del reticolato

Sin dalle elementari gli allievi usano i "reticolati trasformati" per riprodurre in scala loro disegni:



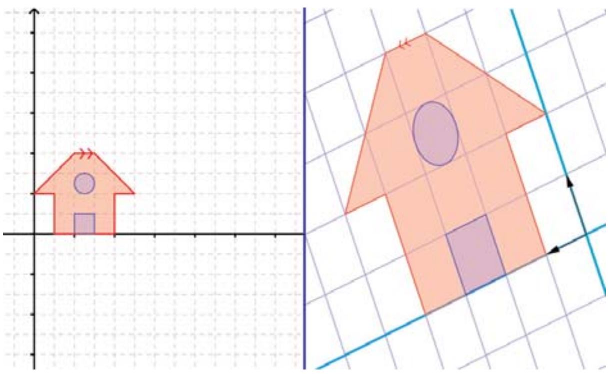
Ora che sono grandi è giunto il momento di rivelare loro che queste figure sono tra loro affini…

La trasformazione del reticolato cartesiano parte dal considerare i trasformati dei versori degli assi, che non sono altro che le due colonne di A, infatti:

$$\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto \mathbf{i}'=A\cdot\mathbf{i}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto \mathbf{j}'=A\cdot\mathbf{j}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

Passiamo quindi dal reticolato ortogonale a quadretti unitari ad un reticolato a parallelogrammi di area $|A|$:



$|A|$ è un'area "con segno", ossia l'affinità è:
$|A|>0\Rightarrow$ **diretta** (conserva l'*orientamento* dei punti)
$|A|<0\Rightarrow$ **invertente** (lo inverte, come in figura).

Per convenzione il verso positivo di percorrenza di una curva è quello antiorario.

Per determinare i parallelogrammi alla base (sic!) del reticolato trasformato, ricaviamo dalla matrice A:
a) i loro lati $|\mathbf{i}'|=\sqrt{a_{11}^2+a_{21}^2}$ e $|\mathbf{j}'|=\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}$
b) l'angolo θ da essi formato, tramite
$\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}'=|\mathbf{i}'||\mathbf{j}'|\cos\theta$.

7 Condizioni di Similitudine

Anche i bimbi delle elementari sanno che se il "nuovo" reticolato è fatto di quadrati più grandi, magari ruotati rispetto al reticolato originale, la figura risulterà ingrandita ma manterrà la stessa forma. Ciò si interpreta, al liceo, dicendo che le due figure sono fra loro *simili*. Proviamo a dirlo nel linguaggio più appropriato.

Usare "quadratoni" invece di quadretti significa che:
a) $|\mathbf{i}'|=|\mathbf{j}'| \quad \Leftrightarrow a_{11}^2+a_{21}^2=a_{21}^2+a_{22}^2$
b) $\mathbf{i}'\perp\mathbf{j}' \quad \Leftrightarrow a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$.

Tali condizioni sono quindi quelle che A deve soddisfare affinché sia una **similitudine**.

In tal caso i lati tra figure corrispondenti saranno in proporzione e il loro *rapporto di similitudine (k)* sarà uguale a quello tra $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{i}$ o tra $\mathbf{j}'$ e $\mathbf{j}$, ossia:

$$k=\sqrt{a_{11}^2+a_{21}^2}=\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}\ .$$

Possiamo attribuire a k lo stesso segno di $|A|$. A questo punto, è facile individuare una **isometria** come similitudine con $k = 1$ (diretta) o $k = -1$ (invertente).

8 Affinità… per felini ("affelinità")

Siamo pronti a far stiracchiare un po' il nostro gatto *Blue*, ma prima facciamo bene la sua conoscenza. Per costruirlo in modo da occupare il quadratino unitario abbiamo usato, ispirandoci a [2] e rendendolo simmetrico rispetto a $x = 0.5$:

viso: semiellisse di semiassi $a = 0.5$ e $b = 1$
fronte: arco di circonferenza
orecchie: due segmenti rettilinei
occhi: un cerchio e un'ellisse
bocca: triangolo
vibrisse: non esageriamo…

Come visto al punto 6, la trasformazione A è univocamente determinata fissando i vettori **i′** e **j′**, attraverso il loro estremo mobile. Nel foglio di GeoGebra evidenziamo il parallelogramma che genera il nuovo reticolato e che conterrà il viso del gatto trasformato, *Red*.
Il nuovo reticolato è ottenuto costruendo, col comando *Successione[ ]*, due fasci di rette parallele a **i′** e **j′**.

Per ottenere Red, abbiamo applicato l'affinità A^{-1} alle curve che compongono Blue. Ecco cosa accade al viso:

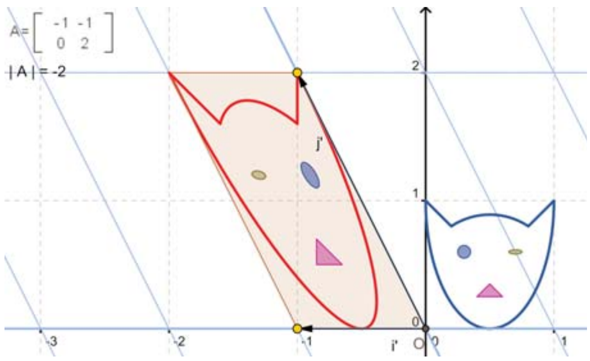
$$\gamma:\frac{(x-0.5)^2}{0.5^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1 \Leftrightarrow \gamma:4x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

$$\Downarrow A^{-1}$$

$$\gamma':\frac{\left(\frac{a_{22}x-a_{12}y}{|A|}-0.5\right)^2}{0.5^2}+\frac{\left(\frac{-a_{21}x+a_{11}y}{|A|}-1\right)^2}{1^2}=1$$

Nello stiramento in figura seguente, abbiamo ad esempio

$$\gamma':4x^2+4xy+\tfrac{5}{4}y^2+4x+y+1=0$$



Notiamo per inciso che il viso di Red nell'es. ha un *verso* di percorrenza invertito rispetto a quello di Blue e che l'*area* del parallelogramma "di base" del nuovo reticolato è il doppio di quella del quadrato di partenza. Tutte queste informazioni sono ricavabili dal semplice fatto che $|A|=-2$.

9 Rapporti di stiramento e direzioni invarianti

Per completare l'opera, individuiamo caratteristiche essenziali di A ossia, se esistono, le sue direzioni invarianti con rispettivi rapporti di stiramento.

Trovare direzioni invarianti significa trovare vettori che, trasformati, restano multipli di sé stessi, ossia tali che

(5) $\quad A\cdot\underline{v}=\lambda\cdot\underline{v} \Leftrightarrow (A-\lambda\cdot I)\cdot\underline{v}=\underline{0}$

Ciò equivale a chiedere che il sistema omogeneo

(6) $$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0\end{cases}$$

abbia soluzioni non nulle, ossia non sia determinato, e quindi sia verificata l'**equazione caratteristica** in λ

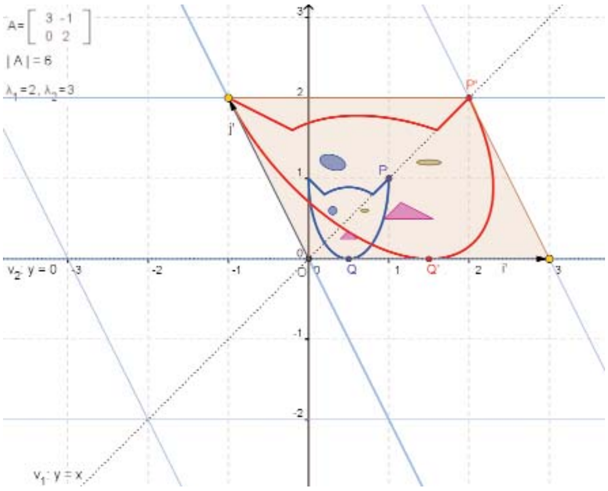
(7) $$\pi(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Le soluzioni di (7) si dicono ***autovalori*** di A. Sostituendoli nel sistema (6) otteniamo, se esistono, i corrispondenti vettori che soddisfano la condizione iniziale (5), chiamati **autovettori**. Se ad es. $\lambda=1$ lungo una direzione, vuol dire che i punti di quella retta restano invariati, al loro posto: tale retta si dirà **unita**.

GeoGebra non ha incorporati, nell'attuale versione 3.0, comandi che permettano di trattare le matrici, ma se consideriamo la parabola a primo membro di (7)

$$\pi(x)=(a_{11}-x)(a_{22}-x)-a_{12}a_{21}$$

è possibile trovarne gli zeri usando il comando *Radice[ ]*: λ_1 e λ_2 sono le ascisse dei punti così trovati.



Nell'es. in figura abbiamo la seguente situazione:

$$\pi(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda_1=2 \vee \lambda_2=3$$

a tali autovalori corrispondono gli autovettori:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

che individuano le direzioni (rette) invarianti

$$v_1 : y = x \quad \text{e} \quad v_2 : y = 0.$$

Nel grafico notiamo infatti che la punta P' dell'orecchio destro del gatto resta sulla retta $y = x$, ma dista il doppio dall'origine: $\overrightarrow{OP'} = 2\,\overrightarrow{OP}$. Invece il mento Q' giace ancora sull'asse x ma dista il triplo dall'origine: $\overrightarrow{OQ'} = 3\,\overrightarrow{OQ}$.

COME VOLEVASI MIAGOLARE!

Il foglio dinamico descritto in questo articolo è su:
http://chiriano.thebrain.net/materiale/geogebra.asp?id=Reticolato1_Gatto&cat=Trasformazioni

Miao a tutti…

BIBLIOGRAFIA

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Arnold's_cat_map
http://mathworld.wolfram.com/ArnoldsCatMap.html
http://demonstrations.wolfram.com/ArnoldsCatMap/
[2] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer, 1995 [pag. 59]
[3] W. Maraschini, M. Palma, Multi ForMat (vol. 15), Paravia, 2002
[4] G. Zwirner, L. Scaglianti, Funzioni in R (vol. 2), Cedam, 1998

108. Felix Klein e il programma di Erlangen, quadro storico-biografico[1]

di Antonio Bernardo

Nel 1865, Julius Plücker, professore di matematica e fisica all'Università di Bonn, ha la ventura di trovare fra i propri studenti del primo corso un giovane dotato di eccezionale talento matematico, Felix Klein. Plücker lo fa nominare assistente, quando Klein ha solo diciassette anni.
Plücker ha due diversi interessi scientifici: in matematica si occupa di geometria proiettiva e in fisica dei raggi catodici.

1 Felix Klein: i suoi maestri, i suoi primi lavori

Nel periodo in cui Klein è assistente di Plücker, quest'ultimo mette a punto un compendio della propria ricerca matematica. Il primo volume del lavoro dedicato alla *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* [Nuova geometria dello spazio, fondata sulla considerazione della retta come elemento spaziale] vede la luce nel 1868.
Sin dagli esordi della propria carriera di matematico, Plucker, ispirandosi alle idee di Gergonne, aveva progettato di trattare analiticamente la geometria proiettiva.
La geometria proiettiva aveva sollevato, agli inizi del secolo XIX, una serie di discussioni fra i matematici. Il primo problema è originato da una contesa fra J.V. Poncelet e J. Gergonne, allievi entrambi di G. Monge, considerato il creatore di questa nuova geometria. Poncelet ritiene che sia sufficiente individuare intuitivamente le proprietà proiettive delle figure per stabilire principi e teoremi della geometria proiettiva; Gergonne pensa invece che il metodo proposto da Poncelet sia poco rigoroso e che pertanto anche per la geometria proiettiva sia necessario fare ricorso al metodo algebrico cartesiano. Il dibattito fra coloro che sostengono l'efficacia del metodo sintetico-euclideo e quelli che prediligono invece il metodo analitico è centrale nella cultura tedesca. I primi, grazie ai lavori di Steiner, riescono a generare da enti e principi proiettivi anche le figure più complesse come le coniche e le superfici e, con von Staudt, giungono a dimostrare l'indipendenza della geometria proiettiva da quella metrico-euclidea. I secondi, a opera di Möbius, Hesse e Plücker, introducono l'algebra in geometria proiettiva, individuando un nuovo modo per determinare le coordinate geometriche di un punto.
Il problema da risolvere consisteva nel trovare il modo di descrivere algebricamente i punti impropri o all'infinito, elementi specifici della geometria proiettiva. Questa scienza era nata come rappresentazione grafica di figure tridimensionali su di un piano. Per dare a un disegno il senso della profondità, è necessario realizzarlo come se tutte le rette fra loro parallele andassero a convergere in un punto. Dato che nella realtà simili punti di convergenza non esistono, i matematici li chiamano punti impropri o all'infinito.
Plücker comprende che, per descrivere i punti all'infinito, non sono sufficienti le coppie di coordinate cartesiane. Attribuisce allora a ogni singolo punto terne numeriche che chiama *coordinate omogenee;* attraverso questo coordinate, infatti, le equazioni relative alla geometria proiettiva sono tutte omogenee.
Le coordinate di Plücker sono individuate in modo tale che, quando il valore del terzo numero è "zero", le coordinate descrivono i punti all'infinito.
Nel citato lavoro del 1868, Plücker tratta algebricamente anche le superfici più complesse e dimostra la fertilità dei metodi algebrici in geometria proiettiva, perché assume, riprendendo una sua vecchia idea, la retta e non il punto come elemento fondamentale dello spazio.

[1] Questo articolo è una rivisitazione di Antonio Bernardo, Quadro storico-biografico, in Felix Klein, Il Programma di Erlangen, a cura di E.Agazzi e A.Bernardo, Editrice La scuola, 1998.

Plücker muore in quello stesso anno e lascia il secondo volume della sua opera allo stato di semplici appunti. Klein perde il posto di assistente ma consegue il diploma di laurea a Bonn sotto la guida di A. Clebsch, che proprio nel 1868 viene nominato professore di geometria a Gottinga. La tesi di laurea di Klein (Sulla trasformazione dell'equazione generale di secondo grado a una forma canonica, per mezzo delle coordinare di retta) resta nel solco della linea di pensiero avviata da Plücker, ma la scomparsa del maestro rende Klein incerto sulla direzione da dare alla propria ricerca: non sa, cioè, se dedicarsi alla matematica o alla fisica. Il caso decide per lui.

Agli inizi del 1869, l'editore Teubner di Lipsia, per non lasciare incompiuta l'opera di Plücker, chiede a Clebsch di curarne la seconda parte. Clebsch, colpito quanto Plücker dalle straordinarie capacità matematiche del giovanissimo Klein, ritiene che sia quest'ultimo la persona più adatta per un tale incarico. Ottiene quindi da Teubner che sia Klein a curare l'edizione del secondo volume del lavoro di Plücker. Gli eventi seguono questo corso e Klein si trasferisce a Gottinga.

Clebsch ha interessi più vasti di quelli di Plücker, perché si occupa di geometria proiettiva, di geometria delle superfici e di teoria degli invarianti. Mentre Plücker rimaneva legato a un'immagine della geometria proiettiva come settore autonomo e seguiva quindi il proposito di adattare la geometria cartesiana alla nuova geometria proiettiva, Clebsch studia la geometria proiettiva in funzione delle forme algebriche e avvia quel settore d'indagine denominato in seguito Geometria Algebrica. Quest'ultima individua le caratteristiche globali di una curva o di una superficie e studia quelle equazioni algebriche, che sono in grado di rappresentare la totalità dei punti di una figura.

La più ampia e chiara visione dei problemi della geometria del tempo, resa possibile dal distacco generazionale che separa Plücker da Clebsch, spinge quest'ultimo a individuare quel che vi è di comune nei diversi metodi usati in geometria, anziché fissare la propria attenzione sulle diversità di quei metodi. È Clebsch che trasmette al giovane Klein l'interesse per l'unità dei metodi in geometria.

Poco prima dell'arrivo di Klein a Gottinga, Clebsch fonda i *Mathematische Annalen.* Accade così che i primi lavori di Klein compaiano sul secondo numero della suddetta rivista. Il più interessante di questi scritti è l'articolo *Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades* [Sulla teoria dei complessi di rette di primo e secondo grado]. Vediamo brevemente di cosa si tratta.

Nel 1866, E. Kummer aveva individuato la soluzione algebrica di quella superficie che risulta dall'anomalia ottica per la quale la luce riflessa da un telescopio parabolico non converge in un punto ma costituisce una superficie, detta appunto superficie di Kummer. Nello scritto citato, Klein, assumendo l'identità fra raggi luminosi e fasci di rette, dimostra che è più semplice generare la superficie di Kummer a partire da un complesso di rette, anziché da un insieme di punti. Lo scritto di Klein è un'applicazione pratica dei metodi geometrici di Plücker e mira a dare risalto alla loro efficacia.

L'influenza di Clebsch non ha solo spinto Klein ad allargare i propri interessi ai vari metodi della geometria, ma ha anche generato il desiderio del giovane studioso di comprendere le ragioni del conflitto teorico fra le diverse scuole tedesche di matematica. Problema questo che, in età matura, Klein affermerà essersi posto sin da giovane. In ragione di ciò, dopo avere pubblicato il secondo volume dell'opera di Plücker, si trasferisce da Gottinga a Berlino. Siamo nel 1869.

A Berlino, frequenta il *Seminario Matematico,* fondato da Kummer e da quest'ultimo diretto in collaborazione con K. Weierstrass e L. Kronecker, e, nell'intento di chiarire a se stesso quale uso possa realmente farsi del metodo geometrico di Plücker, segue con particolare interesse i corsi di geometria diretti da Kummer.

Proprio in quegli anni si era recato a studiare presso Kummer anche il matematico norvegese Sophus Lie. Quest'ultimo ha una formazione molto prossima a quella di Klein e conosce a fondo la geometria di Plücker. Questa circostanza spiega l'amicizia che s'instaura fra i due giovani studiosi.

Al "seminario matematico", Lie presenta una relazione nella quale avanza l'ipotesi che sia possibile ricondurre lo studio dei complessi di rette di Plücker allo studio di un insieme continuo di trasformazioni geometriche. A Klein una simile idea sembra originale. Pertanto, aiuta Lie a redigere

un articolo in tedesco su questo tema e si preoccupa di farlo pubblicare da Clebsch sul "Notiziario" dell'Università di Gottinga. Il lavoro di Lie induce Klein ad approfondire la conoscenza dei contributi di A. Cayley alla geometria proiettiva.
Il matematico inglese Arthur Cayley aveva sviluppato la teoria degli invarianti algebrici, cioè di quelle proprietà delle forme algebriche che restano invariate per una trasformazione lineare delle variabili. In un secondo momento, Cayley ha l'idea di applicare la teoria degli invarianti algebrici alla geometria, assimilando le trasformazioni algebriche lineari alle trasformazioni proiettive e gli invarianti algebrici agli invarianti proiettivi. Da ciò consegue che la geometria proiettiva è, per Cayley, «tutta la geometria». La geometria di Euclide è quindi un caso particolare di geometria proiettiva [1].
Altra importante esperienza berlinese di Klein è l'incontro con il matematico austriaco Otto Stoltz. Costui fornisce a Klein notizie dettagliate sulla geometria di Bolyai e Lobacevskij. Venuto a conoscenza dell'esistenza delle geometrie non euclidee, Klein intuisce che, se si tengono presenti i risultati di Cayley, anche le metriche non euclidee dovrebbero potersi costruire come casi particolari di geometria proiettiva. Avanza la suddetta ipotesi in una relazione tenuta al "Seminario matematico" di Weierstrass.
Weierstrass esprime un giudizio altamente negativo sull'ipotesi avanzata da Klein, perché ritiene che una geometria costruita indipendentemente dal concetto di distanza non abbia alcun senso.
In verità, l'intervento di Klein è lacunoso e affrettato. Egli, infatti, non aveva tenuto conto del fatto che Cayley aveva trattato algebricamente la geometria proiettiva, servendosi delle coordinate di Plücker: coordinate che assumono implicitamente il concetto euclideo di distanza.
Il mancato apprezzamento di Weierstrass, giustamente considerato in quel tempo il più grande matematico vivente, sarà per Klein e Lie motivo di un risentimento che durerà tutta la vita. La verità è che Weierstrass non nutriva alcun interesse per gli studi di geometria, di fatto cessati a Berlino con la scomparsa di Steiner; per altro verso, Klein e Lie erano del tutto ignari a quell'epoca del lavoro che Weierstrass stava conducendo nella direzione della "aritmetizzazione dell'analisi", obiettivo diventato fondamentale per la ricerca di Weierstrass e, più in generale, della scuola matematica di Berlino.
La divergenza d'interessi sugli sviluppi della matematica fra la scuola di Berlino da un lato e i giovani Klein e Lie dall'altro, consiglia a questi ultimi di recarsi in Francia, patria indiscussa della geometria proiettiva. Lie si trasferisce a Parigi agli inizi del 1870; Klein lo raggiunge a distanza di qualche mese.
Il sistema culturale francese è completamente diverso da quello tedesco. La mancanza di uno stato nazionale centralizzato ha generato in Germania una serie di capitali culturali, che coltivano ciascuna la propria tradizione, mentre Parigi è l'unico vero centro della cultura francese. Al contrasto fra Gottinga e Berlino, come rispettivi centri di studio della geometria e dell'analisi, Parigi oppone la simultanea presenza di due grandi maestri, Michel Chasles per la geometria e Charles Hermite per l'analisi. Questo fatto induce Klein e Lie a pensare di avere effettuato la giusta scelta della propria sede di studi.
A Parigi, i due giovani studiosi conoscono Chasles e intessono rapporti d'amicizia con Gaston Darboux e Camille Jordan. Confrontando i lavori di Darboux con i propri, Klein e Lie traggono la conclusione che, nonostante la diversità dei metodi impiegati, alcuni dei risultati conseguiti sono comuni. Klein e Lie avevano infatti studiato le curve e le superfici con gli strumenti della geometria proiettiva, mentre Darboux aveva affrontato gli stessi argomenti con i metodi della geometria metrico-differenziale.
L'indirizzo geometrico differenziale, contrariamente a quello algebrico, si occupa delle caratteristiche locali di curve e superfici, vale a dire delle caratteristiche che riguardano ciò che si verifica nelle immediate vicinanze di un punto. Si tratta in realtà di uno studio che getta un ponte fra analisi e geometria. È un tipo di ricerca che, iniziata in Francia con Monge, vi ritorna diversi decenni dopo, arricchita dai fondamentali contributi di Friedrich Gauss.
Il confronto con Darboux suggerisce a Klein e Lie di redigere due note, che Chasles presenta all'Accademia delle scienze [2]. Riprendendo l'idea centrale dei loro precedenti lavori, i due giovani studiosi dimostrano che una famiglia di curve o

di superfici può essere studiata per mezzo di una classe infinita di trasformazioni lineari. In realtà, l'uso delle trasformazioni lineari in geometria proiettiva è reso chiaro dagli invarianti, mentre l'uso di questo stesso metodo risulta difficile da applicare alla geometria differenziale delle superfici. È per questa ragione che i citati lavori di Klein e di Lie non ricevono consensi, nemmeno da parte di Clebsch. Questo insuccesso spinge Klein e Lie ad approfondire sia lo studio delle trasformazioni geometriche, sia i rapporti fra geometria differenziale e geometria proiettiva. Purtroppo l'esplodere del conflitto franco-prussiano costringe i due studiosi a lasciare Parigi e a separarsi. Klein non partecipa alla guerra, perché si ammala di tifo a Düisseldorf, suo paese natale. In questa sede, Lie lo raggiunge per una breve visita.
Agli inizi del 1871 Klein ritorna a Gottinga, dove consegue l'abilitazione all'insegnamento universitario e dove, sempre in collaborazione con Lie, approfondisce il problema della struttura delle trasformazioni geometriche. Gli autori intravedono una certa analogia tra il proprio modo di trattare le trasformazioni geometriche e quello usato da Jordan per le sostituzioni algebriche [3].
Non riescono comunque a unificare i due campi di ricerca, perché la struttura delle trasformazioni geometriche è continua, mentre quella delle sostituzioni algebriche è discreta. E vero che la struttura delle sostituzioni, come dice Jordan, si fonda sul concetto di gruppo, ma Klein e Lie non riescono a vedere che anche la struttura a "sistema chiuso" sulla quale fondano le trasformazioni può essere considerata come un gruppo.
Nonostante quest'impasse, i due giovani amici comprendono di avere individuato un interessante filone di ricerca, in ragione di ciò separano i rispettivi ambiti d'indagine. Lie, abile nel calcolo, studia i gruppi continui e le applicazioni di essi all'analisi, mentre Klein è tutto preso dal problema dell'unificazione delle diverse geometrie.

2 Klein e le geometrie non euclidee

Un breve soggiorno di Stoltz a Gottinga facilita il progetto di Klein. Stoltz, infatti, comunica all'amico i risultati di von Staudt e la conseguente possibilità di trattare la geometria proiettiva indipendentemente da qualsiasi riferimento al concetto di distanza. Questa notizia genera in Klein la convinzione che Weierstrass non fosse completamente informato quando pensava alla geometria come alla scienza della misura. Egli riprende quindi il progetto di costruire le geometrie non euclidee, servendosi degli invarianti di Cayley.
A questo tema dedica sia una nota che Clebsch presenta alla "Reale Società delle Scienze di Gottinga" [4], sia un lavoro pubblicato in due parti sui *Mathematische Annalen*[5].
Premette che è suo proposito riconsiderare sia la geometria di Gauss, Lobacevskij e Bolyai, sia quella di Riemann, evitando di prendere le mosse dal problema delle parallele. Quest'ultimo modo di trattare la questione introdurrebbe surrettiziamente in geometria considerazioni di tipo filosofico.
Intenzione di Klein è invece dimostrare che la trattazione algebrica della geometria proiettiva consente di affermare che le "cosiddette" geometrie non euclidee altro non sono che casi particolari di geometria proiettiva.
Nel primo paragrafo, l'autore si limita a fornire le informazioni necessarie per fare comprendere come i diversi modi di trattare la teoria delle parallele producano geometrie diverse e non sovrapponibili. Nella geometria euclidea, per un punto passa una sola parallela a un retta data. In quella di Lobacevskij, Gauss e Bolyai ne passano almeno due, mentre nella geometria di Riemann nessuna.
Per superare le barriere che separano le geometrie, è necessario affidarsi all'algebra e mettere da parte l'uso dei modelli. I modelli sono imprecisi e insufficienti: possiamo infatti rappresentare piani non euclidei per mezzo di modelli tridimensionali euclidei, mentre non possiamo in alcun modo realizzare modelli di spazi non euclidei. Klein si riferisce infatti al tentativo di E. Beltrami di fornire un modello del piano di Lobacevskij attraverso la pseudosfera e a quello di Riemann di offrire un'immagine intuitiva di un diverso tipo di piano non euclideo, facendo ricorso alla superficie di una sfera.
Klein precisa che si servirà dell'idea di Cayley in maniera generalizzata, e quindi estendendo il discorso dal piano allo spazio. Egli vuole definire la distanza fra due punti dello spazio, partendo dalla geometria proiettiva. A questo proposito, assu-

me una superficie di secondo grado come *superficie fondamentale.* Considera poi due punti qualsiasi dello spazio. La retta che unisce questi due punti interseca la superficie fondamentale in altri due punti. Quattro punti formano un *birapporto*[2]. Dato che il birapporto è un invariante proiettivo, il suo logaritmo può essere usato per definire la distanza fra i due punti dello spazio. In ragione di ciò, la superficie assoluta diventa la superficie dei punti all'infinito. Considerato poi che essa può essere scelta arbitrariamente, consegue che, se la superficie è reale, i due punti all'infinito sono reali e distinti, mentre, se essa è degenere, i due punti all'infinito sono reali e coincidenti. Infine, se la superficie è immaginaria, i due punti all'infinito sono immaginari. Dato che l'iperbole ha due punti reali all'infinito, la parabola ne ha uno e l'ellisse nessuno, Klein denota rispettivamente questi tre sistemi metrici come geometrie iperbolica, parabolica ed ellittica. Nel primo caso si costruisce la geometria di Gauss, Bolyai e Lobacevskij, nel secondo quella di Euclide e nel terzo quella di Riemann.
Sempre nello stesso anno, in ragione del progetto di unificare i diversi modi di trattare la geometria, Klein torna a occuparsi di un problema che si era già posto a Parigi, quello dei rapporti fra geometria proiettiva e geometria differenziale.
Il primo intervento in questa direzione è l'articolo *Ùber Linien-geometrie und metrìsche Geometrie* (Sulla geometria delle rette e la geometria metrica). Utilizzando l'idea di Lie, per la quale le proprietà proiettive delle rette possono essere convertite in proprietà differenziali delle sfere, Klein perviene alla convinzione che, assumendo la sfera come elemento fondamentale dello spazio, le trasformazioni di Lie consentono di affermare che geometria proiettiva e geometria differenziale conseguono identici risultati, pur essendo due modi diversi di trattare la geometria.
L'aver compreso che geometria differenziale e geometria proiettiva hanno lo stesso grado di generalità spinge Klein a rendersi conto che il proprio lavoro di unificazione dei metodi geometrici non è ancora terminato. A una revisione critica di questo tema è appunto dedicata la seconda parte del saggio *Ùber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Sulla cosiddetta geometria non euclidea). Klein ha finalmente inteso che Riemann non è soltanto il creatore di una nuova geometria non euclidea, ma è soprattutto l'autore che ha fatto con la geometria differenziale ciò che egli stesso ha fatto con la geometria proiettiva: entrambi hanno dedotto le geometrie metriche da una geometria più generale. Il metodo è diverso. Riemann si è servito dell'analisi; Klein dell'algebra. Lo scopo il medesimo: dimostrare che le tre geometrie metriche corrispondono a tre distinte "varietà", precisamente quelle a curvatura costante, negativa, nulla o positiva.
Scopo di Klein è quindi quello di stabilire un legame fra le varietà riemanniane a curvatura costante e le varietà proiettive. Per compiere una simile operazione si serve dei gruppi di trasformazioni. Diviene allora possibile reinterpretare la geometria metrica sia come caso particolare della geometria proiettiva, sia come caso particolare della geometria differenziale di Riemann.
Jordan ha dimostrato che i movimenti delle figure nello spazio formano un gruppo [6]. La geometria euclidea è pertanto lo studio delle proprietà che restano invariate rispetto a un certo gruppo, che Klein chiama *principale.* La geometria proiettiva è invece lo studio delle proprietà che restano invariate rispetto al gruppo delle trasformazioni proiettive. Da quest'ultima affermazione segue che il gruppo *principale* o euclideo è solo una parte del gruppo proiettivo, precisamente quella che lascia invariati i punti del cerchio immaginario all'infinito. Più in generale, si ottiene dalla geometria proiettiva una qualsiasi geometria metrica, quando si passa dal gruppo di tutte le trasformazioni proiettive a quelli che lasciano inalterata un'equazione di secondo grado. Si ricordi che la superficie fondamentale di secondo grado, della quale si è in precedenza parlato, è appunto espressa da un'equazione di secondo grado. Ciò dimostra che per mezzo della teoria dei gruppi

[2] Il birapporto di quattro punti A, B, C, D, è l'espressione (AC: BC): (AD: BD). I primi studiosi di geometria proiettiva sapevano che il birapporto è l'unica grandezza numerica che si conserva nelle trasformazioni proiettive. Questi autori lo fondavano comunque sul concetto di distanza e, pertanto, su di un concetto metrico e non proiettivo. È stato Staudt a darne la definizione descrittiva della quale si è servito Klein.

di trasformazioni si possono ottenere gli stessi risultati conseguiti da Cayley in termini d'invarianti.
Klein rivolge a Riemann un'obiezione. Riemann tratta la geometria fondandola su considerazioni di tipo fisico e asserisce che le uniche varietà sulle quali è possibile effettuare misure sono quelle a curvatura costante. Riemann, in sostanza, pensa solo alle varietà sulle quali i segmenti si possono spostare senza subire modificazioni nella lunghezza. È questo il caso particolare dello spazio in cui viviamo. Inoltre, come ha dimostrato Beltrami [7], nelle varietà a curvatura costante le geodetiche rappresentate con coordinate curvilinee sono espresse da equazioni lineari[3]. Pertanto, le trasformazioni che lasciano inalterata la metrica sono trasformazioni lineari, ossia trasformazioni proiettive: «i gruppi di trasformazioni che in una varietà a curvatura costante lasciano inalterata la metrica corrispondono in un opportuno sistema di coordinate ai gruppi di quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata un'equazione di secondo grado».
Se geometria proiettiva e geometria differenziale sono entrambe in grado di fondare le geometrie metriche, significa che, liberare la geometria generale dal concetto di misura, come hanno fatto rispettivamente von Staudt e Riemann, equivale a eliminare dalla geometria il problema delle parallele.

3 Programma di Erlangen

Verso la fine del 1871, Clebsch è convinto che Klein sia ormai maturo per essere nominato professore di geometria. Ne propone la candidatura all'Università di Erlangen, la cui cattedra è vacante dal 1867, anno della scomparsa di von Staudt. Nell'ottobre del 1872, Klein riceve la nomina e, secondo la consuetudine, deve illustrare nella prolusione inaugurale le linee direttrici della propria ricerca. Il 7 dicembre Klein rende pubblica la memoria *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche* [8].
Stando alle dichiarazioni dello stesso Klein, lo scritto in questione era già pronto da circa un anno. In esso, l'autore portava a compimento il progetto di unificazione dell'intera geometria sotto il titolo "Metodi della geometria". Pare che Lie, pur giudicando il saggio di grande interesse, lo abbia arricchito con numerosi spunti critici. Inoltre, sarebbe stato Lie a convincere Klein che l'indagine non riguardasse metodi diversi ma in realtà differenti ricerche.
Comunque stiano le cose, Clebsch non ebbe la ventura di vedere il lavoro compiuto, essendo scomparso a soli trentanove anni nel novembre del 1872.
Scopo essenziale del lavoro di Klein è l'individuazione di un principio atto a unificare le diverse ricerche geometriche. Il progetto era reso necessario dall'avvento della geometria proiettiva, che aveva sconvolto l'assetto della geometria euclidea: la geometria proiettiva è stata infatti costruita sulle trasformazioni per proiezioni e prescindendo da qualsiasi riferimento al concetto di misura. Ne sono sorti due diversi problemi. In primo luogo, la misura non è più considerata una proprietà intrinseca degli oggetti, ma soltanto un sistema di relazioni. In secondo luogo, l'estensione del concetto di trasformazione ha dato vita ad altri settori di ricerca geometrica, quali la geometria delle trasformazioni per raggi reciproci e quella delle trasformazioni razionali.
Da quando le "rappresentazioni spaziali" non sono più l'elemento portante della geometria, è diventato doveroso, spiega Klein, considerare come geometriche, sia le ricerche relative alle varietà pluridimensionali, sia quei settori d'indagine ai quali queste ultime hanno dato vita.
Sebbene la geometria si sia sviluppata attraverso una serie di ricerche parallele, essa dovrebbe, a giudizio di Klein, essere considerata come una

[3] In una lettera a D'Ovidio del 25 dicembre 1872, Beltrami afferma di essersi convinto, dopo aver letto Cayley, che quest'ultimo ha conseguito, servendosi della geometria proiettiva, risultati equivalenti ai propri, ottenuti con l'impiego della geometria differenziale.
A parere di Beltrami, non si tratta di una pura e semplice coincidenza, bensì del fatto che la geometria proiettiva assume le equazioni lineari come linee di minima distanza. Per Beltrami, in conclusione, la geometria proiettiva studierebbe «inconsapevolmente» gli spazi di curvatura costante: «Io ho avuto il torto di non pubblicare questa osservazione, che fu poi fatta dal Klein e corredata da lui di molti sviluppi, a molti dei quali io non avevo punto pensato».
Cfr. G. LORIA, *Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche,* Padova, Cedam, 1937, pp. 194-195.

scienza unitaria.
A questo fine, si possono seguire due differenti percorsi. Si può, cioè, trattare l'argomento nel modo più astratto e generale possibile, studiando le varietà pluridimensionali; oppure si può ripercorrere il tracciato storico attraverso il quale si è costruita la geometria. Klein ritiene più semplice, per un pubblico non specialista, la seconda alternativa: il suo lavoro prende quindi le mosse dalla geometria di Euclide.
La geometria di Euclide studia quelle proprietà delle figure che restano invariate quando si muovono. Se consideriamo i movimenti come un'operazione effettuata su tutto lo spazio e non sulle figure, possiamo affermare che la totalità dei movimenti costituisce un gruppo di trasformazioni. Klein lo chiama gruppo principale e osserva che la geometria di Euclide è lo studio delle proprietà invarianti rispetto a questo gruppo.
Esiste comunque un altro modo di considerare il medesimo problema: quello in cui la rappresentazione spaziale viene sostituita dal concetto di varietà a tre dimensioni. In un tale caso, non esiste un particolare gruppo che si distingua dagli altri e caratterizzi univocamente la varietà. Tutti i gruppi sono equivalenti.
Da ciò consegue che il problema della fondazione di qualsiasi geometria può essere espresso in questi termini: "Data una varietà e un gruppo di trasformazioni di essa, si sviluppi la teoria degli invarianti relativi al gruppo."
I moderni indirizzi geometrici, secondo Klein, sono caratterizzati dal fatto che, invece di prendere in considerazione il gruppo principale, trattano gruppi di trasformazioni più estesi: gruppi cioè che contengono al proprio interno il gruppo principale.
Il contrasto tra le nuove geometrie e la geometria euclidea si spiega con il fatto che, quando si passa a un gruppo più esteso, solo una parte delle proprietà geometriche si conserva. In altre parole, alcune proprietà delle figure della geometria euclidea non sono più tali, quando si passi a una geometria che usa un gruppo più ampio. Uno di questi gruppi è quello delle trasformazioni proiettive. Il gruppo principale si caratterizza all'interno del gruppo proiettivo per il fatto che le sue trasformazioni lasciano inalterata una particolare figura dello spazio, il cerchio immaginario all'infinito (in effetti, un cerchio che resta tale per qualsiasi trasformazione dello spazio diventa un sistema di misura, rappresentando il luogo dei punti equidistanti da un punto dato). Le proprietà metriche diventano allora relazioni proiettive delle figure con questa forma immaginaria.
Klein introduce a questo punto la nozione di equivalenza delle teorie geometriche o, in termini più moderni, l'isomorfismo tra strutture geometriche: due teorie sono equivalenti, quando i loro gruppi si equivalgono. Con questa osservazione, dimostra senza dirlo esplicitamente che la geometria euclidea è equivalente alle geometrie non euclidee e la geometria metrico-proiettiva alla teoria delle forme binarie. Con qualche limite, il discorso vale anche per la geometria differenziale, che può essere trattata con le trasformazioni per raggi reciproci. Resta il fatto che, a giudizio di Klein, qualsiasi studio geometrico può essere ricondotto, per mezzo della teoria dei gruppi di trasformazioni, alla geometria proiettiva.
Si capisce allora perché Klein rigetta la definizione di "geometria non euclidea". Una simile definizione è estranea alla matematica pura e appartiene al linguaggio "cosale" della filosofia.
Nell'ultima parte del suo discorso Klein non omette di ricordare la possibilità di costruire gruppi di trasformazioni più estesi di quello proiettivo. Si può infatti gradualmente passare dal gruppo delle trasformazioni razionali, che fonda le ricerche di geometria algebrica, a quello più esteso delle "deformazioni infinitesime" che sono alla base dell'*analysis situs*. In ordine crescente segue ancora il gruppo delle trasformazioni per punti. Quest'ultimo trova maggiori applicazioni in analisi che in geometria, dato che le forme alle quali si applica sono di tipo analitico: per esempio, le equazioni alle derivate parziali. A giudizio di Klein, il gruppo più ampio è quello delle trasformazioni per contatto. Si tratta di una scoperta di Lie, che ha messo in relazione le ricerche di geometria differenziale sulla curvatura delle superfici con la teoria dei gruppi.

4 Osservazioni a margine

Nel 1872, Klein fa stampare pochi esemplari del proprio lavoro: il numero necessario perché i colleghi dell'Università di Erlangen possano seguire la sua relazione. Klein è quindi perfettamente cosciente che il saggio dedicato alle *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche* ha un valore puramente accademico. Questa circostanza spinge a chiedersi quando e perché quel lavoro sia diventato il celeberrimo *Programma di Erlangen.* Le ragioni sembrano essere di due tipi. Da un lato, la rapida carriera accademica di Klein; dall'altro, il trionfo dell'immagine che egli aveva della geometria, della matematica e più in generale della scienza.

Con l'ingresso all'università e la contestuale prematura scomparsa di Clebsch, Klein diventa di fatto un punto di riferimento, oltre che della propria sede universitaria, anche della prestigiosa scuola geometrica di Gottinga. La sua carriera continua a procedere spedita. Alla morte di Clebsch, assume la direzione dei *Mathematische Annalen.* Nel 1875, sposa Anne Hegel, nipote del famoso filosofo, e si trasferisce a Lipsia. Nel 1886, corona il proprio sogno d'insegnare a Gottinga, sua sede definitiva d'insegnamento. Klein lascia l'università nel 1913 per motivi di salute e muore a Gottinga nel 1925.

Quando lascia l'Università di Lipsia per trasferirsi a Gottinga, Klein ottiene che il posto resosi vacante a causa del proprio trasferimento venga occupato da Lie. Il costituirsi di un polo unitario di ricerca fra Lipsia e Gottinga è una vittoria di Klein nei confronti dei matematici di Berlino.

Si è già detto che il lavoro del 1872 è, in certa misura, il frutto della collaborazione fra Klein e Lie. La collaborazione fra i due autori prosegue, serrata e fertile, anche negli anni che seguono. Tra il 1876 e il 1879, Lie pubblica la *Theorie der Transformationsgruppen* (Teoria dei gruppi di trasformazioni) e completa i suoi studi sui gruppi continui di trasformazioni fra il 1888 e il 1896, con un volume dedicato alla *Geometrìe der Berùhrungstransformationen* (Geometria delle trasformazioni per contatto). Klein, da parte sua, perviene alla classificazione dei gruppi discontinui, nel 1884 pubblica le *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflosung der Gleichungen vom funften Grade* (Lezioni sull'icosaedro e la risoluzione delle equazioni di quinto grado) e fra il 1890-92, le *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Lezioni sulla teoria delle funzioni modulari ellittiche).

Nell'ultimo decennio del secolo, la teoria dei gruppi di trasformazioni è considerata essenziale per gli sviluppi della matematica. In ragione di ciò, Klein e Lie diventano gli indiscussi maestri delle nuove generazioni di studiosi. Ai loro insegnamenti fanno capo matematici di diversa formazione e provenienza: i francesi É. Picard, G. Darboux e H. Poincaré, l'inglese E. Study, gli italiani G. Fano, G. Veronese, L. Bianchi.

Sono perciò gli sviluppi della teoria dei gruppi di trasformazioni, continui e discontinui, a conferire portata storica al saggio del 1872. Accade così che, nel 1890, Corrado Segre affidi a G. Fano la traduzione italiana del testo ormai ritenuto un classico. Nell'anno successivo, appare l'edizione francese, alla quale fanno seguito, nel 1893, sia l'edizione inglese, sia una ristampa sui *Mathematìsche Annalen.* Quest'ultima appare per la prima volta con il sottotitolo *Programma per l'ingresso alla Facoltà di Filosofia, presentato al Senato della Reale Università Federico-Alessandro di Erlangen.* Da quel momento, il saggio *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche* acquista storicamente il nome di "Programma di Erlangen".

Un'ultima annotazione. Nel 1906, quando Poincaré interpreta la relatività assumendo le trasformazioni lorentziane come un gruppo, offre ampia prova che anche la moderna fisica teorica può essere ricondotta allo studio delle proprietà invarianti rispetto a un particolare gruppo di trasformazioni.

Riferimenti bibliografici

[1] A. CAYLEY, *A sìxth memoir upon quantics,* «Philosophical Transactions of thè Rovai Society of London», 149 (1859), pp. 61-90.

[2] F. KLEIN e S. LIE, *Deux notes sur une certame famille de courbes et de surfaces,* «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 70 (1870), presentate da M. Chasles rispettivamente il 6 e il 13 giugno 1870. In *Gesammelte mathema-tische Abhandlungen,* cit., I, pp. 416-423.

[3] C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équatìons algébrìques,* Paris, Gauthier-Villars, 1870.

[4] F. KLEIN, *Ùber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* [Sulla cosiddetta geometria non euclidea], «Nachrichten von der Kòniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gòttigen», 17

(1871). In *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* cit., I, pp. 244-252.
[5] F. KLEIN, *Ùber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* [Sulla cosiddetta geometria non euclidea], «Mathematische Annalen», 4 (1871) e 6 (1873). In *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* cit., I, pp. 254-305 e pp. 311-343.
[6] C. JORDAN, *Mémoire sur les groupes de mouvements,* «Annali di Matematiche», 2 (1869), pp. 167-215 e 322-345.
[7] E. BELTRAMI, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante,* «Annali di matematica pura e applicata», 2 (1868-69), pp. 232-255.
[8] F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen ùber neuere geometrische Forschungen,* Erlangen, Deichert, 1872.
[9] H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'electron,* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», (21) 1906, pp. 129-176. [Trad. it., *La dinamica dell'elettrone,* in H. POINCARÉ, *Scritti di fisica-matematica,* a cura di U. Sanzo, Torino, U.T.E.T., 1993, pp. 543-617].

109. La regolarità per i poliedri e i dadi da gioco

di Giuseppe De Cecco (Università del Salento)

Nella mia esperienza, ormai più che quarantennale, di insegnante universitario, ho potuto notare che nelle Scuole Superiori lo studio della geometria dello spazio è andato gradualmente scomparendo. Così l'intuizione spaziale ([H]) non soccorre più, poiché essa non è stata più educata. *L'intuizione geometrica* – afferma M.F. Atiyah, uno dei massimi matematici contemporanei – *rimane il canale più potente per la comprensione della matematica e dovrebbe essere incoraggiata e coltivata.* Inoltre l'intuizione spaziale permette di dare "significato" al linguaggio algebrico, come osserva R. Thom (1923-2002):

> *La decisione dogmatica "modernista" di eliminare la geometria elementare per far spazio all'analisi e all'algebra lineare, offre ben poco per poter essere sostenuta psicologicamente, poiché gli oggetti algebrici (i simboli) sono troppo poveri semanticamente per farsi capire direttamente come nel caso di una figura spaziale.*

In questo articolo mi soffermerò sul concetto di *regolarità* (metrica, combinatoria, probabilistica) per un poliedro, un concetto che ha tenuto impegnati per tanto tempo illustri matematici. Le difficoltà si incontrano già per la stessa definizione di poliedro, poiché in essa si voleva descrivere il concetto di "poliedro che abbiamo in mente", un concetto non univoco e difficile da formalizzare.
Ebbene mi sembra che tante questioni inerenti ai poliedri siano attualmente trascurate nelle Scuole secondarie in nome di nuove mode, mentre esse non sono per nulla sorpassate, anche a livello di ricerca avanzata[1]. Infatti lo studio dei poliedri in generale e di quelli regolari in particolare è stato fonte di ricerche che attraversano tutta la storia della matematica dai primordi ai nostri giorni, coinvolgendo diverse discipline, apparentemente lontane tra loro: topologia algebrica e differenziale con studio di singolarità, teoria dei gruppi e teoria dei grafi, algebra commutativa e teoria degli invarianti, teoria dell'ottimizzazione, cristallografia. Inoltre è errore comune pensare che tutto ciò che riguarda i poliedri è noto o che è facile da dimostrare.
Insomma dopo circa 2500 anni i poliedri esercitano ancora il loro fascino. Come afferma ancora Atiyah:

> *La matematica moderna non ha chiesto il divorzio dalla matematica tradizionale come a volte si insinua. I matematici hanno unito le loro forze e si sono proiettati in direzioni diverse ma gli obiettivi di base sono ancora in gran parte gli stessi. La differenza sta più nella forma che nella sostanza e se Newton o Gauss potessero riapparire in mezzo a noi, per capire i problemi in discussione della presente generazione di matematici, basterebbe loro soltanto un breve corso preliminare.*

A mio avviso, seguendo Atiyah, è essenziale recuperare il senso d'unità delle diverse branche della matematica: i loro legami (spesso insospettati) e le analogie non sono accidentali, ma fanno parte della essenza della matematica, che è un'attività umana non un programma per computer. Si può dire che la matematica sia *lo studio delle analogie tra le analogie.*
Ebbene l'argomento scelto si presta bene ad esemplificare questa interdisciplinarità ([C],[Em],[Gr]), che tocca la cristallografia, la biologia, la storia dell'arte e della cultura in generale, persino il gioco con i dadi, come vedremo.
Libri sui poliedri hanno segnato epoche ([G],[G-R]). Durante il Medioevo, per molto tempo, l'unico dialogo di Platone direttamente conosciu-

1 Si veda il libro di P.R. Cromwell [C], che può considerarsi la "bibbia" sull'argomento.

cubo - terra

tetraedro – fuoco

ottaedro - aria

icosaedro – aria

dodecaedro - universo

to e letto fu il *Timeo*[2], nel quale i poliedri sono studiati come gli elementi costitutivi della struttura intima del cosmo. Infatti Timeo da Locri, uno dei primi pitagorici, stabilì una corrispondenza mistica tra i quattro solidi più facili da costruire e "i quattro elementi naturali" (fuoco, aria, acqua, terra). *Restava ancora soltanto una quinta combinazione* – come dice Platone – *e Dio se ne servì per ornare il tutto.*
I poliedri regolari sono perciò anche detti "solidi platonici".
Piero della Francesca, il pittore che dà coerente base teorica alla prospettiva centrale, scrive (tra il 1482 e il 1492) il *Libellus de quinque corporibus regularibus,* del quale trattato esiste una versione in volgare nel celebre libro di L. Pacioli *De divina proportione* (1509), illustrato *"con tutta perfectione di prospectiva commo sa el nostro Leonardo da Vinci".* Nel *Mysterium cosmographicum* (1596) Keplero scrive che il Creatore ha tenuto presente i poliedri regolari e che *alla loro natura ha uniformato il numero e la proporzione dei cieli e i rapporti dei moti celesti.*
Infine H. Weyl, nel 1930, trattando del ruolo avuto, nella matematica contemporanea, dal libro di F. Klein *Vorlesungen über das Ikosaeder* scriveva:

> *Il suo Libro-icosaedro è una sinfonia meravigliosa nella quale geometria, algebra, teoria delle funzioni e dei gruppi si armonizzano in una melodia politonale, ma che all'interno viene governata dalla coerenza più profonda.*

Più passa il tempo e più tutte le scienze tendono a matematizzarsi. A mio avviso non bisogna insegnare matematica applicata, ma cercare di creare l'attitudine a scoprire la matematica ovunque essa si applichi. Presentare un argomento nel modo "giusto" non vuol dire presentarlo nel modo più astratto possibile, anzi spesso, in particolare nell'insegnamento nella secondaria di primo grado, il "travestimento ludico" dell'argomento risulta la carta vincente. L'importante è comunicare l'eccitazione intellettuale che si accompagna alla scoperta geometrica e il piacere di capire le scoperte degli altri.

Poliedri convessi

Attualmente in matematica, come è noto, una definizione non è la descrizione di un oggetto esistente o di un oggetto a cui si attribuisce esistenza (in un mondo di idee platoniche), ma è una costruzione del nostro pensiero: l'oggetto definito è bloccato dall'avere le proprietà richieste, per cui dobbiamo accettare poi anche le eventuali figure che verificano la nostra definizione ma che a priori non ci saremmo aspettati di includere.
Euclide non definisce i poliedri in maniera esplicita, ma nel Libro XI implicitamente si deduce che per lui un poliedro è un *"solido delimitato da facce piane".* Ora un solido, nell'accezione comune, è costituito da un sol pezzo; quindi nel concetto di solido è implicita l'idea che il bordo di un poliedro (cioè la superficie che delimita il poliedro) divida lo spazio (in cui esso è immerso) in due parti, una limitata da chiamarsi *interna* e una illimitata da chiamarsi *esterna.* Ciò suggerisce di porre a fondamento del concetto di poliedro il teorema di C. Jordan[3] (1838-1922), sul quale non ci fermiamo.

2 Nell'affresco di Raffaello "Scuola d'Atene", Platone ha in mano proprio questo libro.
3 Se Π è una (superficie) poliedrica semplice e chiusa, allora essa divide lo spazio in cui è immersa in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera Π. Per una dimostrazione elementare si può vedere [DC].

Nella definizione di Euclide rientrano ovviamente i poliedri ordinari (cubo, parallelepipedo, piramidi, …) ma anche i poliedri anulari, i poliedri cavi e tutti quelli che sono delimitati da facce piane.
Per eliminare questi "casi non voluti" dobbiamo chiedere che il poliedro sia *convesso,* cioè se A e B sono due punti qualsiasi del poliedro richiediamo che il segmento di estremi A e B appartenga interamente al poliedro. Possiamo allora dare la seguente definizione, che si trova anche in testi scolastici.

> *Si dice poliedro convesso (o semplicemente poliedro) ogni sottoinsieme limitato dello spazio, che si ottiene come intersezione di un numero finito di semispazi (chiusi).*

Per evitare casi patologici (per esempio un segmento) chiediamo anche che la parte interna del poliedro sia non vuota.
Si prova facilmente che, se V è un punto interno al poliedro X, allora ogni semiretta di origine V incontra soltanto in un punto il contorno di X.
Sia X un poliedro convesso ed O il suo centro di gravità o *baricentro* (certamente interno a X). Se V è un vertice di X, il piano passante per V ed ortogonale alla retta OV è detto *piano polare* di V; tutti i piani polari dei vertici di X individuano un nuovo poliedro X^*, detto *poliedro duale* di X, i cui vertici sono i poli delle facce di X.
Per esempio sono duali tra loro il cubo e l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, mentre il tetraedro è autoduale.

Poliedri metricamente regolari

Una faccia di un poliedro si dice *regolare* se è costituita da un poligono regolare (cioè un poligono equilatero ed equiangolo). Un vertice del poliedro è detto *regolare* se tutte le coppie di spigoli consecutivi uscenti da esso formano angoli congruenti. Due vertici sono detti *congruenti* se in essi concorre lo stesso numero di spigoli e se inoltre sono congruenti gli angoli (piani) tra gli spigoli corrispondenti e gli angoli diedri corrispondenti. Siamo ora in grado di dare la definizione di poliedro regolare, attualmente più usata.

> *Un poliedro è (metricamente) regolare se le facce e i vertici sono regolari e congruenti.*

Quindi si chiede che le facce siano disposte nello stesso modo attorno a ciascun vertice e analogamente che i vertici siano disposti allo stesso modo in ogni faccia; cioè, guardando il poliedro, non troviamo vertici o facce privilegiate.
Come è noto esistono infiniti tipi di poligoni regolari, mentre (tenendo conto che in un vertice la somma degli angoli che vi concorrono deve essere inferiore all'angolo giro) si vede facilmente che esistono solo *5* tipi di poliedri (metricamente) regolari. Essi, come è noto, sono il tetraedro, il cubo o esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

Si osservi che alla definizione di regolarità data sono associate le seguenti richieste (che compaiono in alcuni libri di testo):
– le facce devono essere congruenti,
– le facce devono essere poligoni regolari.
Ma queste due richieste non caratterizzano completamente l'idea di poliedro regolare, poiché trascurano di considerare gli angoloidi. Una bipiramide costituita da triangoli equilateri verifica le condizioni (i) e (ii), ma non è regolare, secondo la nostra definizione. Possiamo certo cambiare la definizione, ma non possiamo più concludere che esistono solo 5 tipi di poliedri regolari. Se però chiediamo che il nostro poliedro sia inscrivibile in una sfera come fa Euclide implicitamente, allora segue che tutti gli angoli solidi e diedrali sono congruenti e tutti i vertici sono circondati dallo stesso numero di facce, cioè il poliedro è regolare.
Commentatori degli *Elementi,* dagli Scolastici in poi, hanno discusso la storia dei solidi regolari considerando le scoperte dei singoli solidi, tenendo conto che essi si ritrovano anche in natura sotto forma di cristalli: la fluorite ha la forma tetraedrica o ottaedrica, la magnetite e il diamante quella ottaedrica, il salgemma e la pirite si trovano spesso nella forma cubica. Anche lo scheletro di alcuni radiolari ha la forma di poliedri regolari [DT].

> Tuttavia – come dice W.C. Waterhouse [W] – *la scoperta di questo o quel particolare solido era secondaria; la scoperta cruciale era il concetto preciso di solido regolare. La lunga familiarità con*

questo concetto ce lo fa apparire ovvio, ma così non è. Si possono conoscere i modelli dei solidi platonici, senza essere in grado di isolare le proprietà comuni che li caratterizzano. Noi abbiamo il concetto matematico di solido regolare solo perché alcuni matematici lo hanno inventato.

L'astrazione è la vera molla della ricerca in matematica!
L'esistenza di esattamente cinque solidi regolari è un bel teorema di classificazione, facile da dimostrare anche in una scuola secondaria di primo grado, ma esso non può essere dimostrato senza una definizione astratta di solido regolare. Un ulteriore passo è stato poi la formalizzazione del concetto di poliedro semiregolare, fissando l'attenzione su qualche proprietà non caratterizzante i poliedri regolari. Così Archimede (287-212 a.C.), richiedendo una "regolarità più debole", perviene alla scoperta del solidi che portano il suo nome.

Poliedri semiregolari

Indeboliamo ora le condizioni che intervengono nella definizione di poliedro regolare.

Un poliedro si dice archimedeo se le facce sono regolari ma non congruenti e i vertici sono congruenti ma non regolari.

Si riconosce che esistono *15* tipi di poliedri archimedei con l'avvertenza che *13* sono individuati a meno di similitudini, mentre due (prismi e antiprismi) ammettono infiniti sottotipi ciascuno.

I poliedri duali degli archimedei[4] *sono quelli che hanno vertici regolari ma non congruenti e facce congruenti ma non regolari.*

Ogni poliedro archimedeo è inscrivibile in una sfera, mentre uno duale è circoscrivibile ad una sfera. La classificazione dei poliedri archimedei duali coincide con quella dei poliedri archimedei. Insieme vengono detti *poliedri semiregolari* (cfr. [C-R], [E]).

Gruppo di simmetria di un poliedro

Sia E lo spazio ordinario; una *isometria* di E è una trasformazione di E in sé che conserva le distanze, quindi la composizione di una traslazione (in particolare l'identità) con una trasformazione ortogonale (simmetria rispetto ad un piano, rotazione intorno ad una retta, rotosimmetria). L'insieme delle isometrie di E, $Iso(E)$, rispetto alla composizione di applicazioni, costituisce un gruppo, detto anche *gruppo euclideo.*
Data una figura X di E, chiamiamo *gruppo di simmetria* di X, $S(X)$, il sottogruppo di $Iso(E)$ costituito dalle isometrie di E che lasciano fissa la figura X; $S(X)$ è isomorfo al gruppo delle isometrie di X. Se X è un poliedro, allora $S(X)$ è finito essendo contenuto nel gruppo di permutazione dei vertici (in numero finito) di X. Inoltre se X^* è il poliedro duale di X, allora $S(X) = S(X^*)$.
Storicamente i gruppi di simmetria dei poliedri sono stati i primi esempi di gruppi algebrici. $S(X)$ "misura il grado di armonia" di una figura, essendo la parola "simmetria" intesa nel senso greco, cioè ordine e proporzione tra le parti di un tutto. Quanto più grande è il gruppo, tanto più la figura è esteticamente armonica, bella!
Ad esempio, il gruppo di simmetria del tetraedro ha *24* elementi, quello del cubo e dell'ottaedro ha *48* elementi, quello del dodecaedro e dell'icosaedro ha *120* elementi, quello della sfera ha infiniti elementi.
Proprietà dei poliedri si traducono in proprietà sui loro gruppi di simmetria: un poliedro X è regolare se il suo gruppo di simmetria è transitivo sulle terne (v, l, f), dove v, l, f sono rispettivamente un vertice, un lato e una faccia di X, tali che v sia estremo di l, lato di f. Essere *transitivo* vuol dire che se (v, l, f) e (v', l', f') sono due arbitrarie terne (del tipo sopra detto), allora esiste un elemento g di $S(X)$, cioè un movimento (che lascia fisso il centro di gravità) tale $g(v, l, f)=(v', l', f')$. Questo formalizza l'idea che ogni vertice e ogni faccia del poliedro regolare ha la stessa configurazione quando lo si osserva.
La transitività del gruppo di simmetria può essere utilizzata per definire la regolarità (metrica) dei

4 Tali poliedri sono anche detti poliedri di E. C. Catalan (1814 -1894).

poliedri di dimensione arbitraria d (detti anche *politopi*). Si dimostra che

per $d=2$ esistono infiniti poligoni regolari;
per $d=3$ esistono solo 5 tipi di poliedri regolari;
per $d=4$ esistono solo 6 tipi di poliedri regolari;
per $d\geq 5$ esistono solo 3 tipi di poliedri regolari.

Per $d\geq 3$ si hanno poliedri regolari rispettivamente di

$d+1$, $2d$, 2^d *facce.*

Per $d=3$ si hanno in più poliedri regolari con *12, 20* facce; per $d=4$ si hanno in più poliedri regolari con *24, 120, 600* facce.

Poliedri combinatoriamente regolari

Nella definizione di poliedri metricamente regolari l'attenzione è rivolta in particolare alla misura dei lati e degli angoli; nella seguente definizione vengono trascurate quelle richieste, fissando l'attenzione alle condizioni d'incidenza.

Un poliedro (convesso) combinatoriamente regolare è un poliedro tale che in ogni vertice concorrono n spigoli ed ogni faccia è limitata dallo stesso numero r di spigoli.

Se indichiamo con α_0 il numero dei vertici del poliedro, con α_1 il numero dei lati e con α_2 quello delle facce, si ha (nelle nostre ipotesi)

$$n\alpha_0 = 2\,\alpha_1 = r\,\alpha_2.$$

Ricordando la formula di Eulero ($\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$) e tenendo conto che n ed r sono numeri naturali maggiori o uguali a *3,* si conclude che le classi dei poliedri convessi combinatoriamente regolari sono in corrispondenza biunivoca con le classi dei poliedri metricamente regolari.
Così nella classe dei parallelepipedi troviamo il cubo, che può considerarsi un rappresentante "bello" della classe.

Poliedri probabilisticamente regolari

I poliedri probabilisticamente regolari sono quelli regolari nel senso del Calcolo delle probabilità, cioè quelli che, se lanciati come dadi, hanno le facce equiprobabili. Ciò si verifica per esempio se il poliedro ha le facce congruenti e simmetriche rispetto ad un punto (il centro di gravità), come accade per i poliedri metricamente regolari. Se consideriamo un poliedro con facce congruenti, la condizione che le facce appaiano alla vista indistinguibili si può formalizzare nel modo seguente, usando il concetto di transitività per facce, che porta alla definizione di *isoedro.*

Un poliedro è un isoedro se, per ogni coppia di facce, esiste una isometria che porti la prima faccia nella seconda.

Molti poliedri non convessi sono transitivi per facce ma noi ci limitiamo a quelli convessi. Grünbaum e Shepard [G-S] hanno dato una completa caratterizzazione degli isoedri[5]: ne esistono *30* tipi di cui *5* famiglie infinite. In particolare sono inclusi i poliedri regolari e i duali degli archimedei. Tutti gli isoedri sono ovviamente "buoni" dadi e si dimostra che tutti hanno un numero *pari* di facce. Questo risultato, come vedremo, mostra che il concetto di isoedro non cattura completamente l'idea di probabilisticamente regolare, come hanno messo in evidenza P. Diaconis[6] e J.B. Keller [D-K], che, con considerazioni di continuità, pervengono ad ammettere l'esistenza di dadi poliedrali con facce non congruenti.
Infatti se tagliamo una bipiramide (con base un poligono regolare e facce triangoli isosceli congruenti) con due piani paralleli alla base ed equidistanti da essa, otteniamo un solido con facce in generale non congruenti tra loro. Se i tagli sono vicini ai vertici, il solido ha piccola probabilità di cadere sulle nuove facce, mentre se i tagli sono vicini alla base, c'è alta probabilità che cada sulle basi. Per continuità è lecito supporre che esistano tagli tali che le $2n+2$ facce abbiano tutte la stessa

5 Cfr. http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.ht,l

6 Persi Diaconis, professore di Statistica, in origine era un prestidigitatore ed ha tenuto la seduta plenaria di chiusura del Congresso Internazionale di Matematica a Berlino nel 1998.

probabilità (uguale a $1/(2n+2)$). La posizione dei tagli non è prevedibile e forse può essere ricavata solo mediante esperimenti.
Analogamente possiamo partire da un prisma infinito proiettante un n-agono regolare e facendo tagli con piani perpendicolari alle generatrici ottenere (almeno in teoria) un poliedro con $n+2$ facce equiprobabili. Si osservi che in tal caso $n+2$ può essere anche dispari.
Non mi risulta, che, almeno per ora, si conosca una caratterizzazione geometrica dei poliedri probabilisticamente regolari, adatti quindi ad essere considerati come buoni dadi.

Dadi poliedrali

Qualche anno fa, tutti abbiamo visto in negozi di giocattoli dadi non cubici, ma poliedrali, usati in generale per giochi cosiddetti "di ruolo" (ad esempio *Dungeons & Dragons*); le facce poi contengono spesso non numeri ma lettere dell'alfabeto.
Il fatto mi incuriosì e decisi di approfondire l'argomento. Penso che anche gli studenti delle scuole superiori possono essere stimolati da questo argomento a studiare con rinnovato interesse i poliedri, in particolare quelli regolari e semiregolari. Spesso una applicazione "concreta" di un argomento basta a tener desta l'attenzione. Inoltre, come ho potuto constatare personalmente più volte, i modelli dei poliedri, realizzati in cartoncino, in legno, in cristallo non lasciano indifferenti grandi e piccoli, che spontaneamente sono portati a riflettere su particolari proprietà e simmetrie.
Come è noto, da tempi remoti, per ragioni magiche e per gioco, è stato usato l'*astragalo* (*ἀστράγαλος* = vertebra), un osso del tarso, fra il calcagno e la tibia, foggiato ad arco con la convessità verso l'alto. Si trovano astragali preistorici usati forse per contare e molti di essi hanno una lettera o lettere su una parte. Poi, ad imitazione della forma dell'astragalo di capra o di montone, vennero costruiti dadi oblunghi d'avorio, di pietra o altro materiale, numerati con punti sulle quattro facce allungate. Essi furono usati non solo per predire il futuro, ma per giocare agli *ossetti* o *aliossi* (dal lat. *aleae ossum*). L'idealizzazione dell'astragalo ha probabilmente dato origine ai dadi[7] che appaiono quasi simultaneamente in differenti parti del globo [D], e in forma non solo di cubo, ma spesso di tetraedro, icosaedro e dodecaedro. Dadi tetraedrali di avorio e di lapislazzuli sono stati trovati nelle tombe reali sumeriche di Ur (circa 3000 a.C.) ([G] e [G-R]); dadi icosaedrici della dinastia tolemaica sono visibili al British Museum di Londra; in Italia, scavi su monte Loffa[8] (nei colli Euganei) hanno portato alla luce un dodecaedro etrusco in steatite, probabilmente usato come giocattolo 2500 anni fa. Ancora oggi si usano dadi oblunghi per giocare a Chausar e dadi semicilindrici per giocare a Senet [Gf]. Gli stessi poliedri regolari per le loro simmetrie e bellezza hanno sempre avuto una connotazione magica.
Probabilmente il dado cubico si è imposto perché è il più semplice da produrre. Ovviamente caratteristica essenziale per un "buon" dado deve essere la equiprobabilità delle sue facce, cioè non debbono esistere facce privilegiate. Ciò è raggiunto

Heath bar- My dice box
http://www.flickr.com/photos/heathbar/3342822834/

7 La parola "dado" quasi certamente proviene dal latino "datum", participio passato del verbo "dare" nel senso di "gettare". I Romani li chiamavano "tesserae" e i Greci "κύβοι".

8 Cfr. S. De Stefani, *Intorno un dodecaedro quasi regolare di pietra a facce pentagonali scolpite con cifre scoperto nelle antichissime capanne di pietra del Monte Loffa,* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, S. 6,4 (1886).

usualmente se il materiale è omogeneo e il poliedro ha tutte facce uguali, simmetriche rispetto al suo baricentro. I dadi antichi non sempre sono buoni dadi a causa di irregolarità. Sembra che né i Greci né i Romani abbiano mai parlato di "probabilità", pur riconoscendo nella caduta dei dadi l'immagine di un evento fortuito, accidentale, imprevisto. Tuttavia esistono antichi dadi e astragali truccati per esempio con piombo. Ma come osserva acutamente R. Ineichen [I], modificare una tendenza di un dado vuol dire avere un'idea del fenomeno della "stabilità statistica", della cosiddetta "legge empirica del caso". Forse la tendenza è stata trovata ripetendo più volte le prove ed annotando i risultati. Altrimenti perché truccare un dado?

Nell'antichità "probabile"[9] era un attributo di una opinione, attributo di una proposizione garantita da un'autorità, ovvero aveva il significato di plausibile, di grande credibilità. E questi attributi non avevano niente a che fare con i giochi d'azzardo ([I]).

BIBLIOGRAFIA

[C] P. R. Cromwell, *Polyhedra,* Cambridge University Press, 1997.

[C-R] H.M. Cundy, A.P. Rollett, *I modelli matematici,* (presentazione di P. Canetta), Feltrinelli, Milano 1974.

[D] F.N. David, *Games, Gods and Gambling,* Charles Griffin & Co.Ltd, London 1962.

[DC] G. De Cecco, *Il teorema di separazione di Jordan,* Archimede, 4, (1976), 193-200.

[D-K] P. Diaconis, J. B. Keller, *Fair Dice,* Amer. Math. Montly 96,(1989), 337-339, http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/fairdice.pdf

[DT] D'Arcy W. Thompson, *Crescita e forma,* Bollati-Boringhieri, 1992.

[E] *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* (a cura di L. Berzolari, G. Vivami, D. Gigli), Hoepli.Milano 1937.

[Em] M. Emmer, *Art and Malhematics: thè Platonic solids,* in "Leonardo", voi. 15 (4),(1982), 277-282.

[G] P. Gario, *L'immagine geometrica del mondo (Storia dei poliedri),* Stampatori Ed. Torino 1979.

[Gf] F.V. Grunfeld, *Giochi nel mondo,* Unicef 1990.

[Gr] U. A. Graziotti, *Polyhedra, The realm og geometric beauty,* S. Francisco 1972

[G-R] L. Giacardi, S.C. Roero, *La matematica delle civiltà arcaiche,* Stampatori Ed. Torino 1979.

[G-S] B. Grünbaum, G.C. Sbepard, *Sferical tilings with transiti-vity properties,* in *TTte Geometrie Vein:* The Coxeter Fesf-schrift, C. Davis, B. Grunbaum and F. Shenk editors, Springer- Verlag, New York, 1982.

[H] D. Hilbert, S. Cohn Vossen, *Geometria intuitiva,* Boringhieri, 1960.

[I] R. Ineichen, *Dadi, astragali e calcolo delle probabilità,* Quaderno n.2000-04, Facoltà di Scienze Economiche, Lugano.

[W] W.C. Waterhouse, *The discovery of the regular solids,* Arch. Hist. Exact Sci., voi. 9 (1979), 212-221.

9 Dal latino "probus", buono.

110. Le fondamenta: le strutture matematiche

di Luca Francesca (luca.francesca01@gmail.com)

Uscendo dalla facoltà di matematica per prendere la macchina e tornare a casa dopo una bella giornata di lezione, ho notato che in lontananza si vedeva un palazzo in costruzione, con le gru che spostavano i blocchi di cemento e i vari mezzi usati per scavare le fondamenta che sosterranno l'abitazione.
Subito la mia mente mi ha portato a pensare alla matematica e alle fondamenta della sua "casa", a quegli oggetti che sono le strutture che vengono utilizzate in ogni sua disciplina sia essa l'analisi o la geometria differenziale.
Quindi mi sono seduto e ho cominciato a scrivere quella che, umilmente, vorrei che fosse una introduzione alle strutture matematiche principali.

1 Gli insiemi

Fin dalle elementari, credo che tutti siano a conoscenza dell'esistenza di quelle collezioni di elementi chiamate *insiemi*.
In realtà una definizione più precisa non si potrebbe darla poiché io, come molti altri autori, considero l'insieme un concetto primitivo, privo cioè di definizione e, dicendolo alla Platone, di innata conoscenza nell'uomo. Per rimanere in linea con l'introduzione gli insiemi sono come la struttura delle fondamenta e gli elementi che ne fanno parte sono i muri e le colonne portanti della nostra casa.
Vi è però una caratterizzazione degli insiemi data dalle seguenti proprietà:

- **Il principio del terzo escluso**: un elemento può appartenere o non appartenere a un determinato insieme, non ci sono vie di mezzo;
- **Il principio di unicità**: un elemento non può comparire più di una volta in un insieme;
- **L'omogeneità**: gli elementi di un insieme non hanno un ordine di comparizione;
- **Univocità**: gli elementi di un insieme lo caratterizzano univocamente: due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.

Vi è anche un insieme che non esiste di per sé e non ha relazioni con la realtà, ma viene usato per comodità matematica. Sto parlando dell'insieme vuoto, indicato con il simbolo $\varnothing$ che non contiene nessun elemento. Una volta che abbiamo questo insieme possiamo giocare con gli insiemi creandone di nuovi, includendoli uno nell'altro… facendo insomma quello che si fa con i numeri: fare di conto. Bisogna però introdurre delle operazioni diverse da quelle conosciute per i numeri e alcune a cui non siamo abituati.

2 Spazi vettoriali

Costruiamo ora il piano terra dopo aver buttato il cemento armato sulle fondamenta ed aver aspettato che si solidificasse, anche perché lo sviluppo di queste formalizzazioni è frutto di molta fatica.
Noi siamo abituati a considerare lo spazio intorno a noi come un "qualcosa" che ha tre dimensioni (alcuni dicono quattro inserendoci anche il tempo) e, fissato un sistema di riferimento ortogonale (parolone usato per definire il piano cartesiano) a descriverlo come insieme di figure.
Un modo equivalente per farlo è quello di considerare la realtà come uno *spazio vettoriale* cioè, in

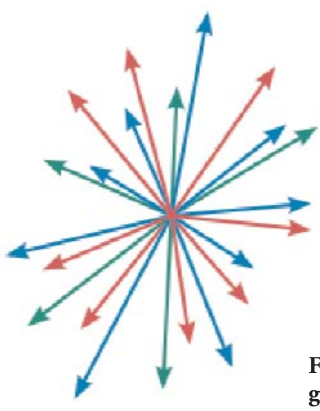
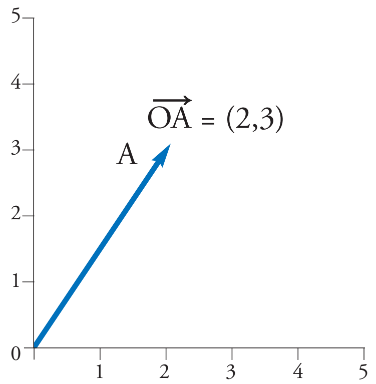


Fig.1 - Rappresentazione grafica di spazio vettoriale

prima battuta, una collezione di oggetti che possono essere sommati e riscalati.
Questo modo di vedere si avvicina ed è alla base di molti modelli che i fisici usano per i vari campi come quello magnetico o elettrico.

Una definizione relativamente formale suona così:
Spazio vettoriale su un campo $(K,+,\cdot)$ è una quaterna $(K,V,+,\cdot)$ dove
$+: V \times V \to V$ è un'operazione binaria interna su V;
$\cdot: K \times V \to V$ è un'operazione esterna su V a coefficienti in K;
valgono le seguenti proprietà:
$\forall \alpha,\beta \in K, \forall u,v \in V$
(1). $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$
(2). $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$
(3). $(\alpha\cdot\beta)\cdot v = \alpha\cdot(\beta\cdot v)$
(4). $1\cdot v = v$

Quello che si dice sopra è appunto quello di cui parlavamo: abbiamo i *vettori* oggetti che sono n-uple di elementi che estendono, anzi generalizzano, il numero con cui siamo abituati a trattare.
In effetti 5 è anche un vettore di **R** (la retta reale) e quindi, per quello che viene chiamata induzione, abbiamo che è equivalente a (5,0) su $\mathbf{R^2}$ o (5,0,0,..,0) in $\mathbf{R^n}$.
Si tratta semplicemente di una proiezione tra spazi vettoriali (in due parole si "sopprime" una variabile portandola a 0).
Quello che è un vettore graficamente è una freccetta



Si differenzia dal numero solito, chiamato *scalare,* poichè dotato di intensità (lunghezza della freccia), verso (senso freccia) e direzione.
In questo nostro spazio noi possiamo dilatare il vettore per una costante scalare come ci dice **(2)** o *addizionare* come dice **(1)** le freccette.
In simboli matematici abbiamo che

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

Siamo quindi passati da uno spazio di punti ad uno spazio di vettori

3 Dallo spazio vettoriale a "qualcosa di più"

Da sempre in matematica si passa dal semplice al complesso,andando sempre più in su nella gerarchia delle proprietà di un oggetto.
Estenderemo ora gli spazi vettoriali aggiungendo loro qualcosa "di più" e vedremo che questo "di più" sarà molto utile per svariati campi: la *norma.*
La norma è quella che si potrebbe chiamare la "lunghezza di un vettore" (anche se poi si applica anche alle matrici e in quel caso è più corretto chiamarla distanza) e che si è abituati ad assimilare, inizialmente, al valore assoluto.
Cosa che, in effetti, sulla linea reale corrisponde al vero.

$$\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$$
$$x \mapsto \| x \|$$

Definizione di norma

In questa formula abbiamo X che è uno spazio vettoriale di tipo reale o complesso. Da questa definizione, come è ovvio aspettarci notiamo che la norma è sempre positiva o nulla.
Ecco le caratteristiche che troverete sull'etichetta della norma

- $\|x\| \ge 0 \quad \forall x \in X$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (*funzione definita positiva*)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ per ogni scalare λ (*omogeneità*)
- $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$ (*disuguaglianza triangolare*)

Una volta definita la norma possiamo ampliare il concetto di spazio vettoriale anche ad oggetti che non sono strettamente vettori.
La norma e lo spazio su cui è definita danno vita allo **spazio normato.** Lo spazio normato si comporta a livello intuitivo come lo spazio a cui siamo abituati poiché passiamo da valori assoluti a norme.
Si può aggiungere un ulteriore piano alla nostra abitazione considerando uno spazio normato *completo.* Questo altisonante nome indica tutte le successioni che si possono formare, purché dopo un certo indice i loro elementi tendano a non distinguersi più (*successione di Cauchy)*, convergono ad un elemento dello spazio. Uno spazio siffatto prende il nome di *spazio di Banach* e ricopre un ruolo importante in molte teorie matematiche, come l'integrazione di Lebesgue, o in ambito fisico.
Se la norma definita nello spazio di Banach è indotta da un prodotto scalare, questo spazio è detto *spazio di Hilbert*.
Negli spazi di Hilbert possiamo avere le regole a cui siamo abituati ma, in questo caso, con ogni tipo di oggetto, dato che possiamo definire anche l'ortogonalità e gli angoli convessi.
Tutti questi temi sono oggetto di ricerche recenti.

4 Le strutture dell'algebra: gruppi e anelli

Passiamo ora alla mansarda del nostro appartamento, una bella mansarda con piscina olimpionica, le strutture matematiche che sono alla base di teorie come la geometria differenziale e la teoria dei numeri (sento un Fermat sussurrato o è solo il vento?): le strutture algebriche.
So che il nome porta brutti ricordi a chi a scuola (o chi c'è ancora) non andava molto d'accordo con l'algebra. Ma noi tratteremo di alcuni concetti di algebra *astratta* che non è solo, anzi quasi non del tutto, fatta di 'conti', poiché, come diceva un mio professore, "i conti della servetta li fa pure una scimmia ammaestrata a schiacciare qualche tasto".
Finita questa digressione di tipo sentimentale, passiamo al vivo della questione.
Come al solito cominciamo con la nostra bella definizione, ebbene sì… la bellezza, ovviamente *formale*, è uno dei motori della matematica.

Un **gruppo** è un insieme G munito di una operazione binaria $*$, che ad ogni coppia di elementi a, b di G associa un elemento, che indichiamo con $a * b$, appartenente a G, rispettando i seguenti assiomi:
G1) - *proprietà associativa*: dati a,b,c appartenenti a G, vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.
G2) - *esistenza dell'elemento neutro*: esiste in G un elemento *neutro* e rispetto all'operazione $*$, cioè tale che $a * e = e * a = a$ per ogni a appartenente a G.
G3) - *esistenza dell'inverso*: ad ogni elemento a di G è associato un elemento b, detto *inverso* di a , tale che $a * b = b * a = e$.

Come possiamo notare a prima vista stiamo ampliando il concetto di insieme 'cucendogli' sopra un'operazione binaria che, come un distributore automatico di caffè, accetta due elementi a e b di G e, dopo aver selezionato il tipo di prodotto (l'operazione), restituisce a*b.
Ovviamente abbiamo a che fare con un oggetto che soddisfa proprietà appropriate come l'esistenza di un elemento neutro (che molto ci ricorda lo 0 dei numeri naturali/interi) o quella di un elemento inverso (che può essere, in analogia, -a).
Ma per essere più pratici ecco alcuni esempi:

- I numeri interi **Z** con l'addizione;
- I numeri razionali **Q\{0}** con la moltiplicazione;
- Il cubo di Rubick ha un suo gruppo;
- I gruppi simmetrici che si ritrovano, ad esempio, in chimica con le formazioni dei vari composti:

L'ammoniaca NH_3: è un gruppo, generato da una rotazione 120° e una riflessione

Saliamo ora di livello e diamo più proprietà (assiomi in realtà dato che non vengono dimostrati)

L'insieme A, dotato di due operazioni binarie + e ·, è un **anello** se valgono i seguenti assiomi:
(A, +) è un gruppo ***abeliano*** con elemento neutro 0:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $0 + a = a + 0 = a$

(A, ·) è un semigruppo:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma:

- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Le relazioni devono valere per ogni a, b e c in A.

Come notiamo compare la dizione gruppo *abeliano,* cioè un gruppo nel quale vale la proprietà commutativa che troviamo nei nostri conti della servetta.
Anche per questa struttura diamo alcuni esempi interessanti:

- L'anello R degli interi positivi, negativi e 0 con l'operazione ordinaria di somma come **+** e di moltiplicazione come *;
- L'insieme dei numeri pari rispetto a moltiplicazione e addizione è un anello commutativo;
- I numeri razionali.

Questi e molti altri esempi ancora si possono fare ma la cosa importante è ricordare che i concetti di gruppo e anello sono nati storicamente dai molti esempi pratici e come modo per regolarizzare le cose, come spesso si fa in matematica.
Gli anelli poi si specificano in campi, moduli, anelli quoziente, ideali… ma la cosa da tenere a mente è che, insieme ai gruppi, sono alla base delle teorie di algebra astratta ma non solo; rientrano in geometria (il gruppo delle proiezioni, il gruppo delle rotazioni), algebra lineare, geometria differenziale, analisi (il semianello della teoria dell'integrazione riemanniana) e chi più ne ha più ne metta.
Sperando di avervi interessato un poco e non annoiato troppo, ringrazio quelli che sono arrivati fino alla fine della lettura e vi saluto… alla prossima illuminazione!

Ringrazio i miei compagni di corso che mi hanno aiutato nella revisione di questo articolo.

Bibliografia consigliata e sitografia

[1] Edoardo Sernesi, *Geometria I Seconda Edizione*, Bollati Boringhieri
[2] I.N Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti
[3] Gianni Gilardi, *Analisi Matematica di Base*, McGraw-Hill
[4] Note di R. Schoof e B. van Geemen, disponibili in forma elettronica all'indirizzo: http://mate.unipv.it/cornalba/notealgebra.pdf

111. Armonie matematiche

Ivano Bilotti, PhD[1]

Riassunto

In questo lavoro sono mostrate alcune correlazioni tra la matematica e la musica, riguardanti soprattutto il campo dell'armonia e dei temperamenti musicali. Molte questioni riguardanti la teoria musicale sono state comprese e chiarite grazie all'intervento della matematica, che ha permesso di capire meglio perché, ad esempio, certi suoni risultano piacevoli all'udito e altri sgradevoli (dissonanze). Non sono state approfondite le teorie usate di solito dai matematici per analizzare fenomeni periodici quale è la musica (ad esempio l'analisi di Fourier), ma è stata fatta una rassegna storica di come si sia evoluta la teoria dell'armonia musicale, evidenziando in particolare l'apporto che la matematica ha avuto in questo ambito nei vari periodi storici, mostrando parallelamente anche come si sia sviluppata la matematica nel tempo.

In this paper we analyze correlations between maths and music, investigating the fields of harmony and musical temperaments. Many topics regarding musical theory was been understood by mathematics, allow us why some sounds results pleasant and other unpleasant (dissonances). We don't show the classical theories used by mathematicians for the description of periodical phenomena, like music (i.e. Fourier analysis), but we made an historical overview of the evolution of musical harmony theory, drawing attention on the aid of maths in this area in the historical periods, showing also the growth of maths in centuries.

Armonie matematiche

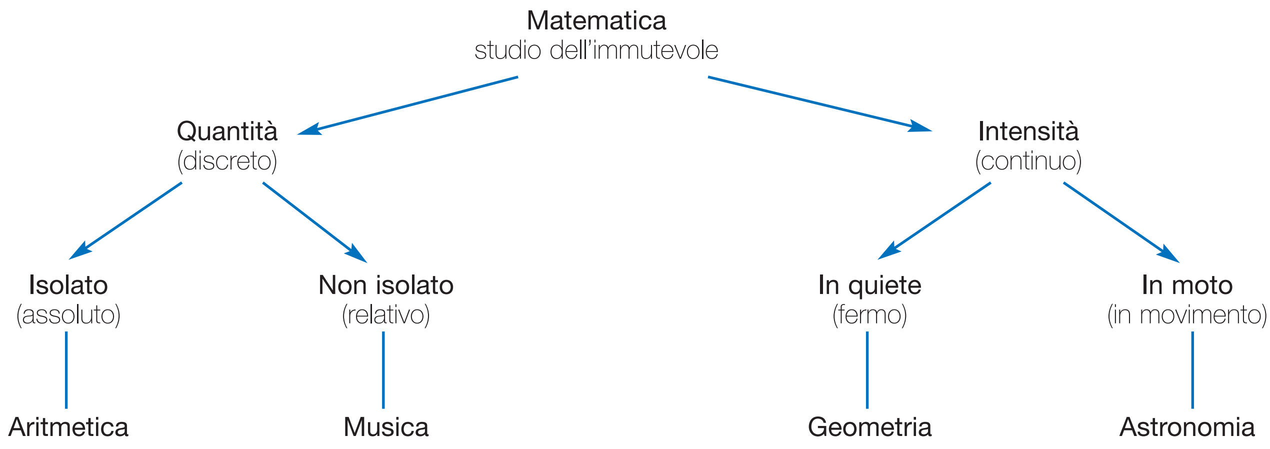
$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}?$$

La risposta alla domanda è abbastanza banale anche per le persone che non hanno molta familiarità con i numeri e con la matematica. Potrebbe capitare che non venga data sempre la stessa risposta come ci si aspetterebbe e, forse meno banalmente, non è detto che tra due risposte diverse una sia giusta e l'altra errata. Esiste infatti una "classe" di professionisti che, per "deformazione professionale", risponderebbero molto probabilmente istintivamente di no, pur essendo bravi in matematica!

Questi professionisti sono i musicisti: nella teoria musicale con le frazioni vengono infatti indicati solitamente i tempi dei brani musicali e in questo caso le due frazioni rappresentano due cose molto diverse tra loro, ben distinguibili anche da orecchi non specializzati nel settore.

Le radici comuni delle due discipline risalgono al medioevo, con l'istituzione del *trivium* (ambito umanistico: retorica, logica e grammatica) e del *quadrivium* (ambito scientifico), la matematica e la musica vennero accorpate in un unico gruppo relativamente alla formazione scolastica propedeutica a quella universitaria. Lo Schema 1 a pagina seguente mostra come in realtà la musica fosse una parte della matematica, la quale comprendeva tutte le discipline studiavano i fenomeni non mutevoli col tempo.

1 Collaboratore a progetto presso il Dipartimento di Chimica Fisica e Inorganica, Facoltà di Chimica Industriale, Università degli Studi di Bologna. ibilotti@ms.fci.unibo.it, ibilotti@gmail.com



Schema 1. La matematica comprendeva tutte le discipline che studiavano i fenomeni immutevoli nel tempo.

Nel corso dei secoli le correlazioni tra la matematica e la musica sono cambiate ma molte "questioni teoriche" riguardanti l'armonia musicale sono state "sbrogliate" grazie all'aiuto della matematica. Una delle più note è quella che riguarda i temperamenti, cioè l'accordatura degli strumenti atta a distribuire le dissonanze presenti tra i vari intervalli musicali su tutta la scala musicale; queste dissonanze derivano dalla natura fisica delle onde sonore e dalla loro "associazione" nelle composizione musicale.

Già dai tempi dei greci era noto che il rapporto tra la frequenza di una nota e quella dell'ottava superiore è 2:1 (se una canna lunga l emette, per esempio, un do, la canna lunga $l / 2$ emette il do dell'ottava superiore e quella lunga $2l$ il do dell'ottava inferiore).

Altri rapporti noti ai greci, oltre all'ottava, erano la *quinta perfetta (do-sol)*, che corrisponde ad un rapporto 3/2 tra le lunghezze e la *quarta perfetta (do-fa)*, (il rapporto in questo caso vale 4/3). Molti secoli dopo Tolomeo scoprì altri intervalli importanti per l'armonia musicale: quello di *terza maggiore (do-mi*, rapporto 5/4) e quello di *sesta maggiore (do-la*, rapporto 5/3).

Appare abbastanza evidente che tutti i principali intervalli coinvolti in accordi consonanti (cioè che risultano piacevoli all'udito) sono connessi a rapporti tra numeri interi ed in particolare risultano tanto più importanti quanto più piccoli sono i numeri. Supponendo che il do abbia frequenza unitaria, tramite alcune semplici divisioni si ottiene la scala completa dei rapporti coinvolti in un'intera ottava, come indicata nella tabella 1:

do	re	mi	Fa	sol	la	si	do'
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Tabella 1. Tabella dei rapporti in una ottava

Queste correlazioni matematiche non potevano passare inosservate ai pitagorici e fu per questo motivo che Pitagora nel 6 sec. a.C. propose una scala musicale basata parzialmente su tali rapporti: costruì un'altra scala musicale usando solo i rapporti tra le ottave e tra le quinte, quelli cioè considerati più consonanti. Nella tabella 2 sono riportate le frequenze ottenute supponendo che il do abbia frequenza unitaria; si ottiene:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
1	**9/8**	81/64	**4/3**	**3/2**	27/16	243/128	**2**

Tabella 2. Scala musicale di Pitagora

In grassetto sono indicate quelle coincidenti con la scala naturale dei greci. Per costruire la tabella si parte dalla frequenza del do, che supponiamo essere unitaria per semplicità, si moltiplica ogni volta per 3/2 e ci si sposta di una quinta; si aggiunge quindi al denominatore un fattore 2 ogni volta che si passa all'ottava superiore (o al numeratore se si passa a quella inferiore): fa-do-sol-re-la-mi-si. La frequenza del fa si ottiene per esempio partendo dal do e andando indietro di una quinta, quindi si divide per 3/2 e poi si moltiplica per 2 per riportarla alla giusta ottava.

Appare evidente la progressione geometrica di ragione 9/8 tra i primi 3 termini (do-re-mi), così come tra il quarto, il quinto ed il sesto (fa-sol-la). Questo ha un analogo musicale sulla tastiera del pianoforte: i tasti bianchi. Gli intervalli fa-sol e si-do non corrispondono ai precedenti, ma sono correlati da un rapporto di 256/243 (in entrambi i casi!); anche questo ha lo stesso analogo sulla tastiera del pianoforte (tasti neri, ovvero dei semitoni). Possiamo perciò concludere che la scala pitagorica fu la prima a mostrare la differenza tra toni e semitoni. Se si prosegue la scala precedente tornando di nuovo al fa, si ottiene un valore di 729/512, diverso dal 4/3 indicato. Questo può essere generalizzato in quanto non è possibile coprire un esatto numero di ottave andando avanti o indietro per quinte. La cosa appare immediata trasponendo le note in numeri, ovvero dimostrando che l'equazione:

$$(3/2)^n = 2^m$$

non ammette soluzioni tra i numeri naturali, cioè non è possibile coprire esattamente un intervallo di ottave con quello di quinte. Questa disuguaglianza è alla base di quella che è nota come **spirale delle quinte**: in pratica non si riesce mai a chiudere una scala in maniera ciclica procedendo per quinte, graficamente vengono rappresentate in quella che è nota come spirale delle quinte:

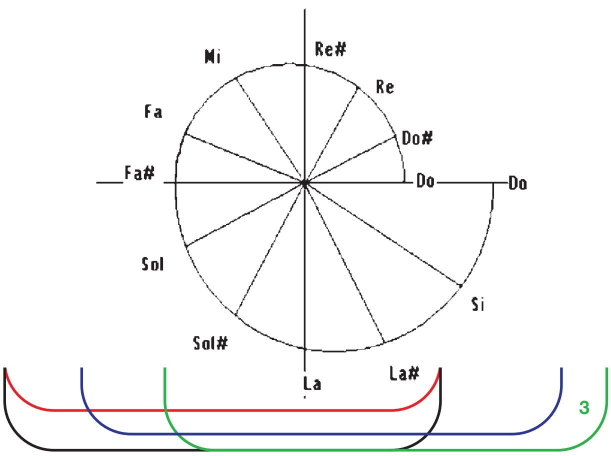


Figura 1. La spirale delle quinte.

Questa scoperta mise in crisi i pitagorici ed il sistema musicale di allora. Pitagora notò anche empiricamente la cosa, ma fu Archita (della stessa scuola) a farne una trattazione rigorosa, osservando che in 7 ottave ci sono 12 quinte, perché ci sono 12 semitoni in un'ottava e in una quinta 7; sperimentalmente osservò che dimezzando di 7 volte una colonna (o una corda) di uno strumento musicale si ottiene un suono nettamente diverso da quello ottenuto diminuendola di 12 volte di un terzo cioè, in termini teorici, salire di 12 quinte e scendere successivamente di 7 ottave non fa tornare al punto di partenza. La differenza risulta essere, in termini di frequenza, pari a:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.0136...$$

pari a circa un quarto di semitono nel temperamento "moderno", ben udibile al nostro orecchio, anche se non siamo direttori d'orchestra e non abbiamo l'orecchio assoluto. Si può giungere allo stesso risultato ragionando in maniera più "algebrica".
Da quanto detto precedentemente parlando della scala pitagorica, si deduce che salire di un tono in essa corrisponde a moltiplicare per 9/8 la frequenza della nota di partenza; ragionando quindi sempre per successioni geometriche, un semitono dovrebbe corrispondere alla radice quadrata del tono, ovvero:

$$\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \neq \frac{256}{243}$$

quindi salire di 2 semitoni non è come salire di un tono, e la differenza è:

$$\frac{9}{8}\left(\frac{243}{256}\right)^{2} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

come visto anche sopra.
Questa differenza viene chiamata **comma diatonico** o **pitagorico.**
Anche in questo caso, così come nella scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al suo lato, fu per cause correlate all'irrazionalità dei numeri (della $\sqrt{2}$ anche in questo caso!) a demolire le teorie pitagoriche basate sui numeri naturali.
La questione diventa ancora più complessa nel momento in cui si considerano le note alterate con diesis e bemolli (i greci non usavano le alterazioni). Riprendiamo la tabella 1 ed espandiamola moltiplicando o dividendo per 3/2 se ci si sposta rispettivamente verso destra o verso sinistra, come indicato nella tabella 3:

…	re^b	la^b	mi^b	si^b	fa	do	sol	re	la	mi	si	fa$^\#$	do$^\#$	…
…	32/243	16/81	8/27	4/9	2/3	1	3/2	9/4	27/8	81/16	243/32	729/64	2187/128	…

Tabella 3. Tabella dei rapporti con diesis e bemolli

Questi valori vanno poi corretti di un fattore 2 ogni volta che si passa da un'ottava ad un'altra. Prendendo in considerazione, per esempio, il rapporto tra re^b e do$^\#$, si ha:

$$\text{re}^b = \frac{32}{243}\cdot 8 = \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$$

$$\text{do}^\# = \frac{2187}{128}\cdot\frac{1}{16} = \frac{2187}{2048} = \frac{3^7}{2^{11}}$$

quindi si ha:

$$\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^{11}}{3^7} = \frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{1}{\mathit{comma}}$$

cioè, tornando agli intervalli:

$$\text{re}^b + \text{comma} = \text{do}^\#$$

da questa relazione derivano 2 cose:
1) la differenza tra le 2 note è un comma;
2) il bemolle risulta più grave del diesis.

Questa trattazione si può generalizzare ad ogni nota alterata, ottenendo alla fine:

tono = bemolle + comma + diesis =
= semitono + comma + semitono

La scala pitagorica, per coprire completamente tutte le note alterate, richiederebbe quindi 21 tasti, invece dei 12 comuni: si devono sdoppiare tutti i tasti che differiscono di un semitono. La cosa sarebbe ancora più complessa qualora si dovessero considerare le doppie alterazioni, in quanto ciascuna singola alterazione dovrebbe essere nuovamente sdoppiata.

do-si$^\#$ re^b-do$^\#$ **re** mi^b-re$^\#$ fa^b-**mi** **fa**-mi$^\#$ sol^b-fa$^\#$
sol la^b-sol$^\#$ **la** si^b-la$^\#$ do^b-**si**

Scala pitagorica alterata

I problemi connessi alla scala pitagorica vennero affrontati dai teorici dell'epoca e uno dei più importanti cambiamenti fu apportato da Gioseffo Zarlino nel XVI sec., il quale modificò il sistema pitagorico, passando ad uno nuovo basato su 1:2:3:4:5:6 (quello pitagorico era basato sulla *tetrachys* pitagorica 1:2:3:4).
Il sistema zarliniano era quindi basato sulla scomposizione dell'intervallo di quinta perfetta $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ in uno di terza maggiore $\frac{5}{4}$ e uno di terza minore $\frac{6}{5}$. Facendo un rapido calcolo per confrontare i vari rapporti, si ottiene infatti:

$$1:\frac{6}{5}:\frac{5}{4}:\frac{3}{2},$$

cioè:

$$20:24:25:30$$

che può essere visto come la suddivisione della quinta sia attraverso una serie aritmetica (20:25:30), in una terza maggiore più una terza minore, sia attraverso una serie armonica (20:24:30), in una terza minore più una terza maggiore.
Il sistema zarliniano sostituì la quarta del sistema pitagorico con una terza pura $\frac{5}{4}$, che non piaceva invece ai pitagorici perché nella loro scala la terza era dissonante, così come lo è in questo caso per la quarta.
La scala zarliniana era quindi basata su 3 intervalli fondamentali: ottava, quinta e terza:

intervallo	*Ottava*	*Quinta*	*terza*
Rapporto	2:1	3:2	5:4

Tabella 4. Parte della scala zarliniana

Partendo da questi, si può ottenere l'intera scala zarliniana:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Tabella 5. La scala zarliniana per intero.

Si parte ad esempio collegando tra loro sol-si-re (dell'ottava superiore), considerando che tra le prime 2 note si ha un intervallo di terza, mentre tra il sol e il re c'è una quinta. Il re dovrà poi essere riportato all'ottava sotto, dividendo per 2. Partendo invece dal do dell'ottava sopra, si scende di una quinta e si ottiene il fa e successivamente, da questo con una terza, si arriva al la.
Facendo ora un confronto con la scala pitagorica, si osserva che, confrontati con il do, i rapporti del re, del fa e del sol sono uguali nelle 2 scale, mentre quelli di mi, la e si risultano diversi. Le differenze risultano uguali tra loro e vengono chiamate **comma sintonico**, o **di Didimo** (Didimo fu il primo a studiare il sistema zarliniano):

$$\frac{81}{64}\cdot\frac{4}{5}=\frac{27}{16}\cdot\frac{3}{5}=\frac{243}{128}\cdot\frac{8}{15}=\frac{3^4}{2^4 5}\approx 1.0125$$

che differisce dal comma pitagorico di 0.0011, una quantità non apprezzabile al nostro orecchio. La scala zarliniana risulta ben più complessa di quella pitagorica, in quanto presenta due diversi toni (definiti tono maggiore, corrispondente ad un rapporto di 9/8, e tono minore, corrispondente ad un rapporto di 10/9) e da un solo semitono (16/15); in questa scala inoltre, il semitono non corrisponde alla metà di nessuno dei toni presenti. Il comma sintonico aiuta a mettere un po' d'ordine in questa scala: sia la differenza tra il tono pitagorico (o il maggiore zarliniano) e quello minore zarliniano, che la differenza tra il semitoni delle 2 scale, corrisponde ad un comma sintonico; infatti si ha:

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}=\frac{243}{256}\cdot\frac{16}{15}=\frac{81}{80}=\text{comma sintonico}$$

Un altro problema presentato da questa scala è che le quarte e le quinte non sono tutte perfette: ad esempio, il valore dell'intervallo re-la risulta essere:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{27}=1.\overline{481}\neq\frac{3}{2}$$

diverso dal 3/2 previsto per la quinta. Un esempio, ancora più noto forse, per quanto riguarda le quarte, è dato dall'intervallo fa-si:

$$\frac{15}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{45}{32}=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}=\ \text{tritono}$$

Il tritono era definito il *diabolus in musica* dai teorici del Medioevo, e quindi "proibito" nella teoria musicale dell'epoca.
La situazione si complica ulteriormente quando si considera la scala cromatica zarliniana, dovendo utilizzare ben 3 diversi rapporti tra le note alterate adiacenti, in quanto i rapporti tra diesis e bemolle cambiano se si tratta un tono maggiore, uno minore o un semitono, portando ad una tastiera a 21 tasti per esprimere tutte le alterazioni, come nella scala pitagorica.
Altri studi furono fatti nel corso dei secoli: Henry Arnaut, ad esempio, a metà del XV sec. cercò di costruire una scala "intermedia" tra la pitagorica e la zarliniana: mantenne tutte le quinte pure (come risultano nella scala pitagorica) eccetto una, scaricando su essa tutte le dissonanze (nella scala zarliniana le quinte sono dissonanti); il risultato fu che questa somma di dissonanze su un solo intervallo diventa così sgradevole per l'orecchio, da rendere quasi insopportabile il risultato, in quanto molto vicina all' ululato di lupo (si-fa$^{\#}$, detta appunto *quinta del lupo*).
Un passo avanti fu fatto distribuendo il comma sintonico presente nella scala zarliniana nella quinta re-la, anche su altre 3 quinte: fa-do, do-sol e sol-re, ottenendo quindi un comma che risulta essere un quarto di quello zarliniano:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{80}}=\frac{3}{2\sqrt[4]{5}}$$

essendo sempre in scala logaritmica, un quarto di comma viene "trasformato" nella radice quarta del comma pitagorico. Questo comma fu chiamato **comma mesotonico.**
Le quinte in questa nuova scala risultano quindi essere uguali ad una quinta pura meno un quarto di comma sintonico, ovvero:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}=\sqrt[4]{5}$$

Gli altri intervalli principali (ottava e terza) della scala zarliniana vengono invece lasciati immutati. Si ottiene quindi la seguente scala, detta scala mesotonica, o temperamento mesotonico:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{5}{2\sqrt[4]{5}}$	$\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$	2

Tabella 6. Scala mesotonica

I rapporti tra le note consecutive diventano così regolari, com'erano nella scala pitagorica e risolvendo i problemi (parzialmente, in realtà) della scala zarliniana. Si ha infatti:

intervallo	do-re	re-mi	mi-fa	fa-sol	sol-la	la-si	si-do
rapporto	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$

Tabella 7. Rapporti tra le note nella scala mesotonica

Un tono in questa scala corrisponde a:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1-1}{2}=\phi-\frac{1}{2}$$

In cui:

$$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\text{sezione aurea.}$$

La sezione aurea era ben nota ai matematici per le sue numerose proprietà; era già conosciuta agli antichi greci, che la chiamarono così per l'armonia e la bellezza delle proporzioni che risultavano nelle costruzioni ogni volta che le lunghezze risultavano correlate tra loro dalla sezione aurea; scelsero infatti di indicarla con la lettera ϕ in onore di Phydia, che costruì il Partenone di Atene seguendo le proporzioni auree. Purtroppo in questo caso la sezione aurea non fu d'aiuto per i teorici della musica ed anche questa scelta fu abbandonata in breve tempo; infatti, un semitono non corrisponde alla metà di un semitono, quindi quando si costruisce la scala cromatica, si hanno ancora diesis e bemolli distinti.
Verso la fine del XVII sec. e nel secolo successivo, si svilupparono altri temperamenti con l'obiettivo principale di semplificare le scale cromatiche che ne risultano. Si fecero moltissimi tentativi (il più importante dei quali, probabilmente, fu quello di Workmeister, che sviluppò il cosiddetto *buon temperamento*), ma solo uno è quello attualmente usato nelle moderne scuole musicali e di liuteria: il **temperamento equabile**.
Ci sono in realtà tracce storiche di questo temperamento risalenti ai tempi dei greci (Aristosseno, VI sec.a.C) e sviluppato da Mersenne e Galilei (padre di Galileo) tra il XVI ed il XVII sec. Nel temperamento equabile, come si potrebbe dedurre dal nome, il comma sintonico viene ripartito su tutti i 12 semitoni presenti in un'ottava; si ha quindi:

$$\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}=\frac{3}{2\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}}$$

Le quinte della scala temperata saranno quindi una quinta pura meno 1/12 di comma diatonico:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}}{3}=\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$$

ottenendo così la scala temperata:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{5}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	2

Tabella 8. Scala temperata.

In questa scala i rapporti tra note consecutive risultano perfettamente regolari, così come d'altronde era per la scala mesotonica:

intervallo	do-re	re-mi	mi-fa	fa-sol	sol-la	la-si	si-do
rapporto	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$	$\sqrt[12]{2}$

Tabella 9. Rapporti tra le note nella scala temperata.

In questo caso però, a differenza dei precedenti, un semitono corrisponde alla metà di un tono!
Questa regolarità nei rapporti tra semitoni consecutivi permette di rappresentare la scala temperata cromatica attraverso una spirale che, a differenza di quella del ciclo delle quinte, risulta logaritmica, grazie proprio alla regolarità degli intervalli.

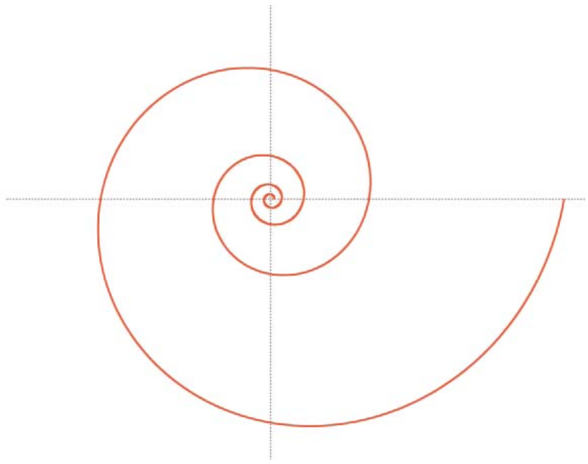


Figura 2. Spirale logaritmica.

La regolarità della scala temperata permette quindi di coprire tutti i semitoni presenti in un'ottava usando 2 diversi intervalli: le quarte e le quinte. Questa bivalenza ha di nuovo origini matematiche: in un'ottava ci sono 12 semitoni, in una quarta 5 e in una quinta 7. A primo avviso si potrebbe pensare che la cosa funzioni perché 12 = 5 + 7, mentre deriva dal fatto che 5 e 7 sono primi con 12 (ovvero non hanno alcun divisore in comune con 12, escluso 1), quindi muovendosi per quinte, ad esempio, si coprono 7 ottave per ottenere tutti i semitoni, poi si ha una ripetizione periodica della sequenza; in modo analogo si può fare con le quarte. Gli altri unici numeri ad essere primi con 12 sono 1 e 11, che corrispondono al salire (1) o scendere (11) di un semitono alla volta, corrispondenti alle soluzioni banali (in gergo matematico) del problema.
Dalle correlazioni tra i toni usate nel temperamento equabile deriva, ad esempio, la forma classica del pianoforte a coda e di molti altri strumenti anche non a corda (flauto di pan).
Esistono moltissime altre connessioni tra matematica e musica: considerando che la musica è fatta di suoni che si ripetono in modo regolare nel tempo, un potente strumento matematico per analizzarla è costituita dall'analisi di Fourier. Altre aree di sovrapposizione meno immediate si hanno, ad esempio, nel campo della simmetria, applicando quindi la teoria dei gruppi alle composizioni musicali, e trovando notevoli connessioni con le sensazioni ricavate a livello di ascolto, specialmente in ambito classico. Al giorno d'oggi, grazie allo sviluppo della tecnologia elettronica, molti strumenti musicali "classici" sono diventati "elettronici", sfruttando tutte le tecniche di codifica del segnale acustico sotto forma di segnale elettronico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Frova A., Fisica nella musica, Zanichelli, Bologna 1999
[2] Odifreddi P., Penna, pennello e bacchetta. Le 3 invidie del matematico, Laterza, Bari, 2005
[3] Hammel Garland T., Vaughan Kahn C., Math and music, harmonious connections, Dale Seymour Publications, Palo Alto, CA, USA 1995

INTERNET

[4] http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf
[5] http://fisicaondemusica.unimore.it/
[6] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/Logarithmic_spiral.png

112. Data Mining: esplorando le miniere alla ricerca della conoscenza nascosta

Clustering con l'algoritmo k-means

di Gaetano Zazzaro[1]

L'uomo è confinato nei limiti angusti del corpo,
come in una prigione, ma la matematica lo libera,
e lo rende più grande dell'intero universo. […]
Sballottato qua e là, senza meta, dalla tempesta
delle passioni, la matematica gli restituisce
la pace interiore, risolvendo armoniosamente
i moti opposti dell'anima, e riconducendola,
sotto la guida della ragione, all'accordo e all'armonia.

Pietro Ramo, *Institutiones dialecticae*

Abstract

In questo articolo si presenta un noto algoritmo di clustering che si chiama k-means, inserendolo nel contesto dell'analisi dei dati non tradizionale (Data Mining). Attraverso questa divulgazione, si spera di stimolare la curiosità dei lettori su questa tecnica e sul Data Mining. Si utilizza il software Geogebra per la geometria dinamica, adoperandolo per le rappresentazioni grafiche e per alcuni calcoli elementari.

1 Introduzione alle tecniche di data mining

Nel 1900, al primo congresso mondiale dei matematici, David Hilbert, uno dei matematici più produttivi allora viventi, mise insieme in un elenco i problemi più importanti (in tutto 23) che la matematica aveva avanti a sé all'alba del secolo XX [1]. Oggi un compito del genere non potrebbe più essere svolto da un solo matematico, per quanto brillante; la specializzazione è così spinta che un Hilbert del 2000 non esiste, né è possibile che esista.

La matematica oggi ha molte incarnazioni e trova applicazioni in moltissimi settori. Ad esempio, la maggior parte degli internauti, probabilmente, non sa che dietro a ciascun click del loro mouse vi sono anni di ricerche matematiche che hanno origini antichissime e diversi obiettivi.

Questo articolo descrive una tecnica algoritmica che è entrata a far parte dei metodi di **Data Mining** (DM) e che si chiama **Clustering**. Il termine "Data Mining" è basato sull'analogia delle operazioni dei minatori che "scavano" all'interno delle miniere grandi quantità di materiale di poco valore per trovare l'oro. Nel DM questo "oro" è l'informazione, precedentemente sconosciuta e non distinguibile, il materiale di poco valore sono i dati e le operazioni di scavo sono le tecniche di esplorazione dei dati.

Il DM si può collegare a vari settori del sapere come la Teoria dell'Informazione, il Calcolo Numerico, l'Intelligenza Artificiale (in particolare *machine learning*, *pattern recognition*), la Statistica Metodologica (con particolare riferimento alla statistica computazionale e multivariata), il Calcolo delle Probabilità, e le discipline economico-

[1] Ricercatore tecnologie software Centro Italiano Ricerche Aerospaziali (C.I.R.A.) g.zazzaro@cira.it

aziendali, specialmente nell'ambito del marketing e dell'organizzazione aziendale. Molte di queste tecniche, ai tempi di Hilbert, erano solo al loro debutto.
La nostra vita quotidiana è sempre più condizionata dai prodotti dell'informatica e delle tecnologie. In questa società dell'informazione, le organizzazioni (come le aziende, i centri di ricerca, le banche, i centri di analisi statistica, etc. etc.) hanno a disposizione enormi quantità di dati, non solo relativi a se stesse, ma anche riguardanti l'ambiente nel quale si trovano ad agire. Infatti, si stima che, approssimativamente, ogni 1100 giorni, nel mondo, le informazioni memorizzate in formato elettronico raddoppino di volume; siamo sommersi dai dati provenienti dalle fonti più disparate: dati numerici provenienti, ad esempio, dai satelliti, oppure da sensori di qualsiasi natura, come quelli che rilevano movimenti tellurici o dati meteorologici; e dati testuali, non strutturati, provenienti, ad esempio, da siti web, agenzie stampa, e-mail, forum, mailing list, newsgroup, etc. Inoltre, negli ultimi decenni la tecnologia si è sviluppata con rapidità esponenziale, e con essa le tecniche di archiviazione, memorizzazione, interrogazione e rappresentazione di questo enorme flusso di dati. Dunque, se da un lato le aziende, oppure gli enti di ricerca (etc.), hanno a disposizione una enorme quantità di dati dettagliati e di testi, dall'altro risulta sempre più difficile districarsi tra le informazioni rilevanti e quelle superflue.
È così emersa l'esigenza di creare dei metodi di scoperta automatica di conoscenza nelle grandi basi di dati; metodi capaci, ad esempio, di discernere le informazioni utili dal rumore. In breve, i dati vengono sottoposti ad un processo di analisi al fine di trasformarli in conoscenza utile alle aziende per supportare decisioni e intraprendere soluzioni più efficaci, ovvero veloci, economicamente sostenibili e tecnologicamente possibili.
I filosofi dell'informazione amano affermare che i dati restano semplici dati finché non vengono gestiti, ossia organizzati in maniera significativa, oppure strutturati, oppure classificati, divenendo solo a quel punto informazione e quindi conoscenza. Da questo assunto (primitivo) risulta necessario ricercare strutture per l'organizzazione intelligente e fruibile dei dati stessi. *Intelligente* nel senso che tale organizzazione deve seguire regole prestabilite, condivise e facilmente comprensibili dall'utente.
Un processo di elaborazione avanzata e di analisi alternativa dei dati è il DM, il cui scopo principale consiste nel recuperare l'informazione nascosta in database di grosse dimensioni.
In particolare, il DM si pone come quel processo che impiega una o più tecniche di apprendimento computerizzate per l'analisi automatica e l'estrazione di conoscenze dai dati che altrimenti sfuggirebbero alla capacità analitica dell'essere umano.
Il DM, dunque, si pone come processo di selezione, esplorazione e modellazione di grosse masse di dati, al fine di scoprire strutture, regolarità o relazioni non note a priori, e allo scopo di ottenere un risultato chiaro e utile al proprietario del database. Tali strutture ottenute si collocano come complementari ai tradizionali modelli specifici del dominio di applicazione.
Infatti, le tecniche statistiche tradizionali di analisi dei dati, come ad esempio la regressione, vengono utilizzate per cercare conferma a fatti che l'utente ipotizza o già conosce. Il maggiore inconveniente di questo metodo è la grossa difficoltà con cui si riescono a ricavare nuove conoscenze. Infatti, essendo il database molto grande, l'utente non riesce ad averne una visione completa, per cui possono sfuggire delle regolarità, o delle simmetrie, o delle strutture che all'elaborazione automatica si spera non sfuggano.
Con le tecniche di DM l'utente cerca tra i dati informazioni che egli ignora a priori e che possono accrescere il bagaglio di conoscenze: il sistema scopre automaticamente importanti informazioni nascoste tra i dati. I dati vengono analizzati per individuare pattern frequenti, regole di associazione, valori ricorrenti, senza alcun intervento dell'utente, al quale resta comunque il compito di valutare l'effettiva importanza delle informazioni ricavate automaticamente dal sistema.
Come accennato, il DM si avvale di numerose tecniche che hanno origine in vari settori della matematica, dell'informatica e della statistica. Tra le tecniche maggiormente utilizzate vi sono: clustering, reti neurali, reti bayesiane, alberi di decisione, apprendimento genetico, analisi delle associazioni, etc. e ciascuna di esse comprende un vasto insieme di metodi e di algoritmi.

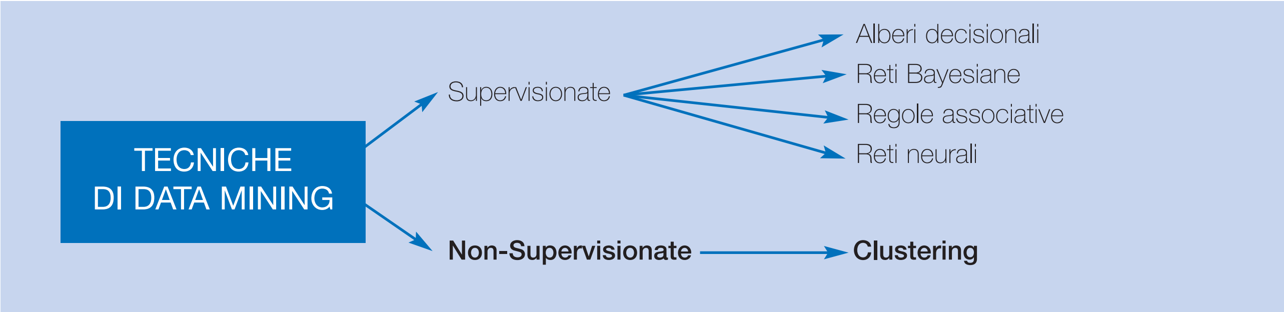


Figura 1. Tecniche di Data Mining

Nella precedente Figura 1 sono schematizzate le tecniche di DM più diffuse, suddivise in tecniche basate su apprendimento supervisionato e tecniche non-supervisionate come il clustering.
Gran parte dei progetti di DM sono supervisionati, il loro obiettivo è quello di generare previsioni, stime, classificazioni o caratterizzazioni relativamente al comportamento di alcune variabili target già individuate in funzione di variabili di input. Ovvero, nei metodi di apprendimento supervisionato, il dataset contiene l'etichetta che indica la classe da apprendere e i nuovi dati sono classificati sulla base di quello che l'algoritmo apprende.
Il clustering, o analisi di raggruppamento, oggetto di questo articolo, è una tecnica fondamentale di DM che fa parte dei metodi non-supervisionati, nei quali non esiste una variabile target da prevedere. In questo caso, un'applicazione del DM non-supervisionato consiste nella suddivisione di un set di dati complesso in una serie di subset più semplici, i cluster appunto, al fine di permettere a tecniche supervisionate, come ad esempio le reti bayesiane o gli alberi di decisione, di trovare con maggiore facilità una spiegazione del comportamento di una variabile target all'interno di ciascun cluster ottenuto. In questo senso, il clustering può essere considerato sia come tecnica consistente ed autonoma in seguito alla quale valutare dei risultati ottenuti, sia come premessa ad altre tecniche di DM più avanzate e adatte al dominio di applicazione.
Il processo globale di analisi di grossi database finalizzata ad estrarre della conoscenza nascosta è noto come **Knowledge Discovery in Databases** (KDD) in cui il DM rappresenta la fase di modellazione, anche se i due termini, ossia KDD e DM, sono diffusamente e impropriamente intesi come equivalenti. Il KDD è l'intero processo automatico di scoperta ed individuazione di strutture all'interno dei dati, dalla selezione ed il preprocessing dei dati, fino alla interpretazione e valutazione dei risultati del modello ottenuto con l'applicazione di un algoritmo di DM.

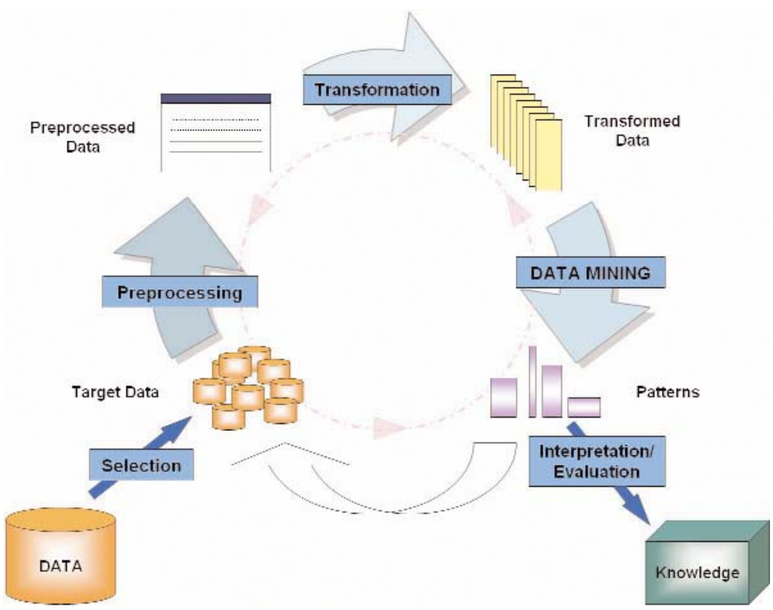


Figura 2. Knowledge Discovery in Databases (KDD) Process

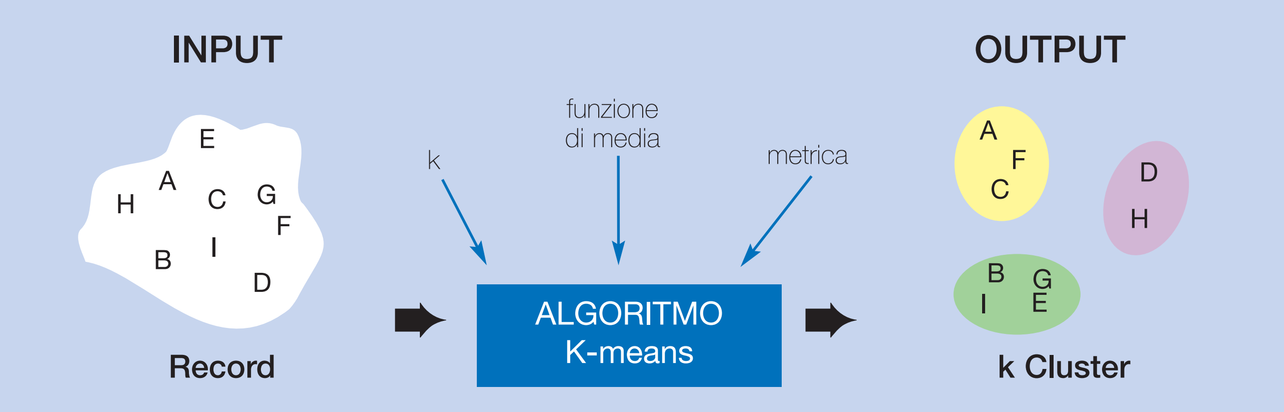


Figura 3. Schema dell'algoritmo

In Figura 2 è schematizzato il processo KDD, sottolineando il suo aspetto iterativo ed incrementale.

2 Cluster Analysis

In questo articolo si discuterà di un metodo di clustering detto **partizionante**, talvolta chiamato anche "semplice", che può essere realizzato con il noto algoritmo **k-means** (o delle k-medie) sviluppato per la prima volta da MacQueen nel 1967 [3].
In linea generale, partendo da un dataset, il clustering si propone di individuare delle regioni distinte nelle quali raggruppare dati in modo tale che i dati all'interno di una stessa regione siano simili tra loro rispetto ad un criterio (metrica) scelto inizialmente, mentre quelli in regioni differenti siano dissimili tra loro. In seguito alla realizzazione di queste regioni o cluster, è l'utente esperto di dominio, grazie all'aiuto di una o più tecniche di valutazione, che decide il significato di tali raggruppamenti.
La cluster analysis ha trovato applicazioni in vari settori, come in economia, nel marketing, nel campo delle assicurazioni, nella computer grafica, o nei motori di ricerca. Infatti, i risultati di un motore di ricerca possono essere sottoposti ad analisi di raggruppamento in modo da mettere in un unico cluster le risposte tra loro simili, presentando in tal modo meno alternative all'utente.
Il clustering può essere utilizzato come tecnica di preprocessing dei dati e per scoprire al loro interno eventuali strutture. Può essere utile prima di utilizzare una tecnica di apprendimento supervisionato (come reti bayesiane, alberi decisionali induttivi, etc…).
L'algoritmo k-means, archetipo dei metodi di raggruppamento, è un algoritmo di clustering che permette di suddividere gruppi di oggetti in *k* partizioni sulla base dei loro attributi. Ogni cluster viene identificato mediante un centroide o punto medio. L'algoritmo segue una procedura iterativa.
In figura 3 è schematizzato l'algoritmo k-means. In input si ha il dataset dei record da raggruppare; l'algoritmo chiede in ingresso anche dei parametri, come il numero k, la funzione di media e la metrica da utilizzare.
L'algoritmo può essere illustrato attraverso la seguente schematizzazione:

1. Scegliere un valore di *k* il numero totale di cluster da determinare.
2. Scegliere in modo casuale (spesso utillizzando un generatore di numeri pseudocasuali) *k* dati nel dataset. Questi sono i centri iniziali (baricentri) dei cluster.
3. Utilizzare la distanza euclidea per assegnare i restanti dati ai centri dei cluster più vicini.
4. Utillizzare i dati in ogni cluster per calcolare una nuova media di ogni cluster.
5. Se le nuove medie sono identiche a quelle calcolate in precedenza, il processo termina; altrimenti, utilizzare le nuove medie come centri dei cluster e ripetere i passi da 3 a 5.

Schema 1. Algoritmo k-means

Come criterio di valutazione generale, una clusterizzazione ottimale per l'algoritmo *k*-means è definita come una clusterizzazione che presenta il valore minimo della somma dei quadrati delle differenze degli errori fra le osservazioni e i centri dei cluster di appartenenza. Trovare una clusterizzazione ottimale per un dato valore di *k* è quasi impossibile dal momento che bisognerebbe ripetere l'algoritmo per ognuna delle possibili scelte dei centri iniziali dei cluster. Anche per poche centinaia di osservazioni non sarebbe pratico applicare *k*-means più volte. Piuttosto, è prassi comune scegliere un criterio di conclusione dell'algoritmo, come un valore massimo accettabile per l'errore quadratico ed eseguire l'algoritmo finché il risultato raggiunto non soddisfa il criterio di conclusione prestabilito.

3 Esempio: Clustering di un dataset numerico

Si applica ora, costruttivamente, l'algoritmo presentato al paragrafo precedente ad un dataset numerico.
Si consideri il dataset della seguente Tabella 1.

	x	y
A	1	2
B	1.5	1
C	2	1
D	1	1.5
E	4	2
F	2	4
G	5	2
H	5	1
I	3	4
J	0.5	2.5
K	4	3
L	2	3
M	1	4
N	1.5	2
O	5	4

Tabella 1 – Dataset numerico

Ciascuno di questi punti, o record, può essere rappresentato nel piano euclideo utilizzando, ad esempio, un software di geometria dinamica di facile reperibilità come Geogebra [7].
L'obiettivo che si intende perseguire è raggruppare in sottoinsiemi i punti tabulati sfruttando delle proprietà della geometria euclidea, e seguendo dei semplici passi che ripercorrono uno degli algoritmi di clustering più famosi ed utilizzati che è il k-means.
La prima scelta da fare riguarda il numero k dei cluster che si intende ricavare; nel caso dell'esempio considerato, viene scelto k=3.
Il secondo passo consiste nello scegliere casualmente k punti del dataset, i quali rappresenteranno i centroidi (o centri, o semi, o baricentri) iniziali (ma alcune versioni dell'algoritmo k-means scelgono casualmente i centroidi non tra i punti del dataset, ma all'esterno, cioè come nuovi punti non coincidenti con quelli del dataset). Ogni centroide rappresenta un cluster in embrione con un unico elemento. Si scelgono, ad esempio, i punti B(1.5,1), E(4,2) e L(2,3).
Altra scelta da effettuare riguarda la metrica. In questo caso, ed è una possibilità molto seguita, si considera la distanza euclidea:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2},$$

dove P e Q sono generici punti del piano.
In Figura 4 sono rappresentati i punti della Tabella 1, dove sono stati evidenziati i tre centroidi iniziali, ossia i punti B, E ed L, congiungendoli tra loro con dei segmenti, formando così un triangolo.
Il passo successivo dell'algoritmo consiste nell'assegnare i rimanenti punti del dataset ai cluster che per il momento sono costituiti, come visto, dai soli centroidi.
Ad esempio, per decidere a quale cluster apparterrà il punto J(0.5,2.5), vengono confrontate le distanze $d(J,B)$, $d(J,L)$, e $d(J,E)$. Si ottiene che:

$$d(J,B)=\sqrt{(0.5-1.5)^2+(2.5-1)^2}=\sqrt{1+2.25}=1.8$$

$$d(J,L)=\sqrt{(0.5-2)^2+(2.5-3)^2}=\sqrt{2.25+0.25}=1.58$$

$$d(J,E)=\sqrt{(0.5-4)^2+(2.5-2)^2}=\sqrt{12.25+0.25}=3.53$$

Essendo $d(J,L)<d(J,B)<d(J,E)$, il punto J viene assegnato al cluster di cui L è il centroide.
Lo stesso procedimento seguito per il punto J può essere ripercorso per ogni punto del dataset

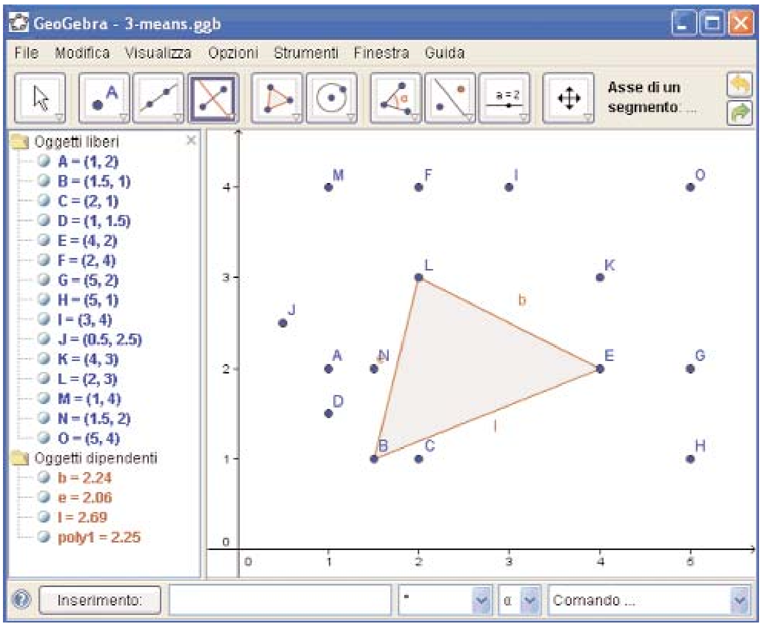


Figura 4 – Rappresentazione nel piano dei punti di Tabella 1

originario, calcolando cioè, per ciascun punto, tre distanze, una da ciascun centroide. La scelta che si segue consiste, quindi, nel "popolare" man mano i cluster con gli altri record del dataset.
È possibile, però, seguire un procedimento più veloce, che si basa sulle proprietà geometriche dell'asse di un segmento euclideo. Ricordiamo che l'asse di un segmento è la perpendicolare condotta nel punto medio del segmento stesso.
L'asse di un segmento ha una notevole proprietà: comunque si consideri un suo punto, esso risulta equidistante dagli estremi del segmento considerato.
Si deduce anche che l'asse di un segmento suddivide il piano in due semipiani α e β, come in Figura 5; ciascun punto P di α è più vicino all'estremo A rispetto all'estremo B, e ciascun punto di β è più vicino all'estremo B rispetto all'estremo A.

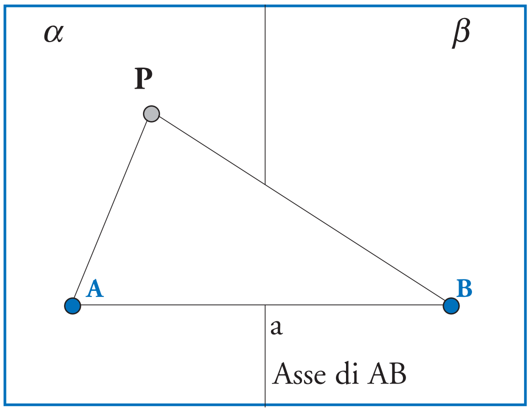


Figura 5– Asse del segmento AB

Quest'ultima proprietà può essere utilizzata per semplificare i calcoli dell'algoritmo di clustering. Utilizzando le funzionalità di Geogebra, si rappresentano i tre assi dei segmenti BE, EL e LB, come mostrato nella successiva Figura 6.

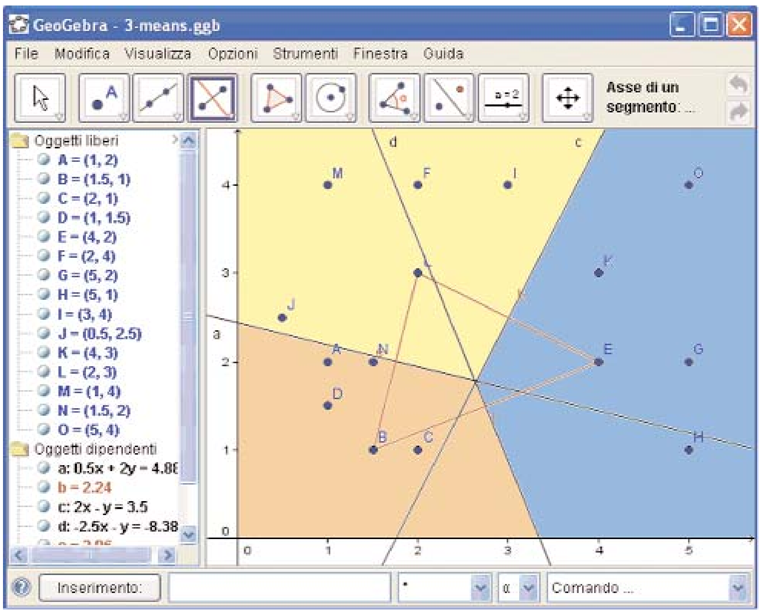


Figura 6 – Prima formazione dei tre cluster

Il punto J, prima considerato, si trova collocato alla destra dell'asse del segmento BL, dunque viene attribuito al cluster di cui L rappresenta il centroide, così come determinato per via analitica precedentemente. Inoltre, ad esempio il punto C, essendo alla destra dell'asse del segmento EB (oppure, equivalentemente, C si trova alla sinistra dell'asse del segmento BE, è una questione di punti di vista), viene assegnato al cluster di cui B è il centroide. I tre cluster sono stati colorati diversamente. Ma è da sottolineare che ciascun cluster è formato da una quantità discreta di punti. Nella successiva Tabella 2 vengono riassunti i tre cluster ottenuti dove vengono evidenziati i centroidi iniziali scelti.

Cluster 1

	x	y
A	1	2
B	1.5	1
C	2	1
D	1	1.5
N	1.5	2

Cluster 2

	x	y
K	4	3
G	5	2
H	5	1
E	4	2
O	5	4

Cluster 3

	x	y
F	2	4
I	3	4
J	0.5	2.5
L	2	3
M	1	4

Tabella 2 – Il contenuto dei tre cluster

Il passo successivo dell'algoritmo consiste nel calcolare la media (da cui means) di ciascun cluster ottenuto in precedenza. La funzione media che viene scelta è la media aritmetica. Si ha dunque:

$$\begin{cases} M_{1,x} = (1+1.5+2+1+1.5)/5 = 1.4 \\ M_{1,y} = (2+1+1+1.5+2)/5 = 1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{2,x} = (4+5+5+4+5)/5 = 4.6 \\ M_{2,y} = (3+2+1+2+4)/5 = 2.4 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{3,x} = (2+3+0.5+2+1)/5 = 1.7 \\ M_{3,y} = (4+4+2.5+3+4)/5 = 3.5 \end{cases}$$

I tre centroidi sono M_1 (1.4,1.5), M_2(4.6,2.4) e M_3(1.7,3.5) e nessuno di questi coincide con alcun punto del dataset. I tre punti così ottenuti costituiranno i tre nuovi centroidi rispetto ai quali verrà iterato il procedimento analitico dei calcoli delle distanze euclidee, oppure il procedimento grafico delle costruzioni degli assi dei segmenti congiungenti i tre centroidi.

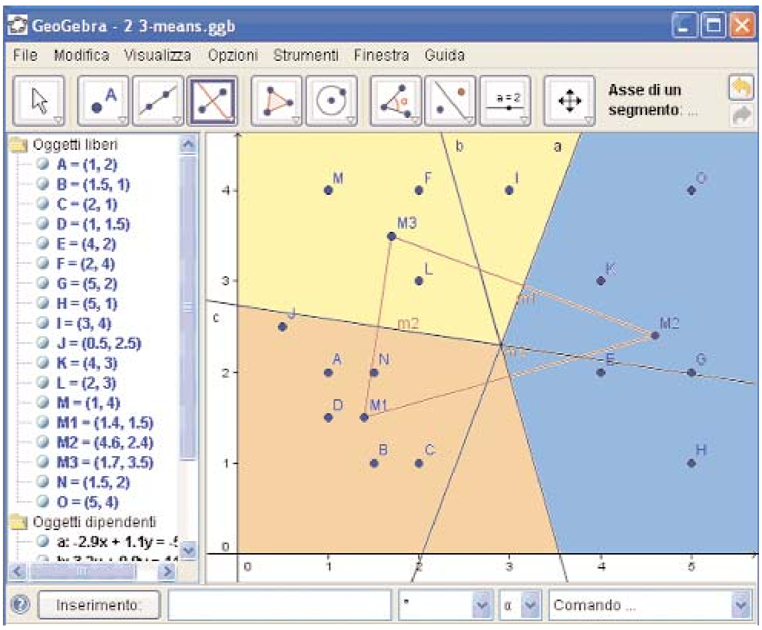


Figura 7– I tre nuovi cluster ottenuti in seguito all'iterazione del procedimento

Dalla Figura 7 si ottengono i tre nuovi cluster:

Cluster 1 - M_1 = (1.4, 1.5)

	x	y
A	1	2
B	1.5	1
C	2	1
J	0.5	2.5
D	1	1.5
N	1.5	2

Cluster 2 - M_2 = (4.6, 2.4)

	x	y
K	4	3
G	5	2
H	5	1
E	4	2
O	5	4

Cluster 3 - M_3 = (1.7, 3.5)

	x	y
F	2	4
I	3	4
L	2	3
M	1	4

Tabella 3 – Il contenuto dei tre nuovi cluster

Per determinare i tre nuovi centroidi, si calcolano le medie:

$$\begin{cases} M_{1,x} = (1+1.5+2+0.5+1+1.5)/6 = 1.25 \\ M_{1,y} = (2+1+1+2.5+1.5+2)/6 = 1.67 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{2,x} = (4+5+5+4+5)/5 = 4.6 \\ M_{2,y} = (3+2+1+2+4)/5 = 2.4 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{3,x} = (2+3+2+1)/4 = 2 \\ M_{3,y} = (4+4+3+4)/4 = 3.75 \end{cases}$$

I tre centroidi sono: $M_1(1.25,1.67)$, $M_2(4.6,2.4)$ e $M_3(2,3.75)$, rispetto ai quali vengono determinati, per via grafica o per via analitica, i tre nuovi cluster.

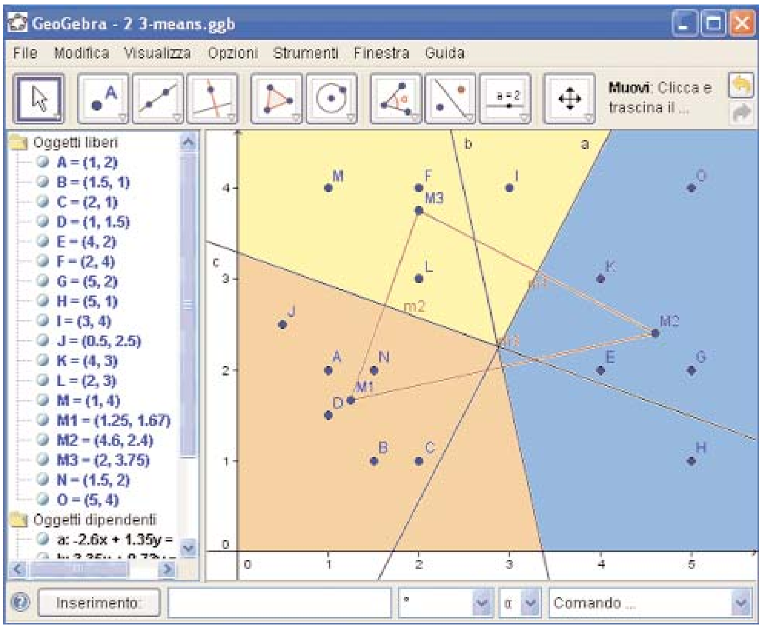


Figura 8 – I tre cluster definitivi

Dalla Figura 8 si determinano i tre nuovi cluster:

Cluster 1 - M_1 = (1.25, 1.67)

	x	y
A	1	2
B	1.5	1
C	2	1
J	0.5	2.5
D	1	1.5
N	1.5	2

Cluster 2 - M_2 = (4.6, 2.4)

	x	y
K	4	3
G	5	2
H	5	1
E	4	2
O	5	4

Cluster 3 - M_3 = (2, 3.75)

	x	y
F	2	4
I	3	4
L	2	3
M	1	4

Tabella 4 – Il contenuto dei tre cluster definitivi

Questi tre cluster contengono gli stessi record dei cluster ottenuti al passo precedente, dunque sono i cluster definitivi e l'algoritmo termina o, come si dice, converge in tre passi.

Conclusioni

In questo articolo è stato introdotto il Data Mining ed è stato presentato l'algoritmo k-means, che rappresenta una delle tecniche di clustering più diffuse. Inoltre, è stato applicato l'algoritmo ad un dataset numerico utilizzando anche il software Geogebra.
Possibili approfondimenti potrebbero riguardare:

- complessità computazionale di k-means e valutazione delle prestazioni;
- clustering per attributi di tipo categorico;
- clustering basato su densità e clustering gerarchico;
- utilizzo di k-means come tecnica di preprocessing per l'applicazione di tecniche di Data Mining per la classificazione;
- differenze tra clustering e tassellazione.

RIFERIMENTI

[1] Bottazzini U., "I problemi di Hilbert. Un programma di ricerca per le generazioni future", in Bartocci C., Betti R., Guerraggio A., Lucchetti R. (a cura di), *Vite matematiche. Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles*, Springer Verlag, 2007.
[2] Dulli S., Polpettini P., Trotta M., *Text Mining: teoria e applicazioni*, FrancoAngeli, 2004.
[3] MacQueen J.B., *Some Methods for Classification Analysis of Multivariate Observations*, Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, 1967, University of California Press, 1:281-297.
[4] Roiger R.J., Geatz M.W., *Introduzione al Data Mining*, McGraw-Hill, 2004.
[5] Russell S.J., Norvig P., *Intelligenza Artificiale. Un approccio moderno*, Voll. 1 e 2, Pearson Education Italia, 2005.
[6] Tan P., Steinbach M., Kumar V., *Introduction to Data Mining*, Pearson Addison Wesley, 2005.
[7] http://www.geogebra.org. Consultato il 6 maggio 2009.

113. Coordinate geografiche di un qualsiasi luogo del globo terrestre ricavate dalla misura di angoli orizzontali di una tripletta stellare

di Michele T. Mazzucato

Nella pratica topografica il problema di Snellius-Pothenot [1] è sicuramente uno dei più noti e maggiormente studiato. Si tratta di una intersezione inversa o all'indietro (in quanto il rilevamento viene effettuato dal punto incognito) di tipo composto (in quanto riferito a più di due punti noti) che permette, nota la posizione di tre punti, di determinare la posizione di un quarto punto, dal quale si effettuano soltanto misure angolari collimando ai tre punti.

Il geodeta fiammingo Willebrord van Royen Snell (Leiden 1580 – 1626) (fonte: www-history.mcs.st-and.ac.uk)

Il problema, noto anche come problema dei tre punti o problema del vertice di piramide piano, prende il nome da Willebrord van Royen Snell (1591-1626), latinizzato in Snellius, e da Laurent Pothenot (1650-1732). Il matematico e geodeta fiammingo Snell, ideatore della moderna triangolazione e della misura delle basi geodetiche, descrisse il problema nell'opera *Eratosthenes Batavus. De Terrae ambitus vera quantitate* (1617) nella quale pubblicò i dati della triangolazione per la misura dell'arco di meridiano fra Alkmaar e Bergen Op Zoom e la base geodetica di Leiden. *"Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantiam ab omnibus unica statione definire"* è la formulazione originaria del problema data da Snellius. Mentre, il matematico e accademico (1682-1699) di Francia Pothenot pubblicò la soluzione del problema in una memoria redatta per l'Académie des Sciences nel 1692 (ben 75 anni dopo quella di Snell che rimase, per lungo tempo, sconosciuta) avente come titolo *Problème de Géometrie Pratique. Trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux points d'où l'on observe* (Memoires de l'Academie Royale des Sciences Depuis 1666 jusqu'à 1699 Tome X Année 1730 pp. 221-224). Tra le numerose soluzioni numeriche del problema Snellius-Pothenot risulta interessante il metodo di Jacques Cassini (Cassini II) (1677-1756) particolarmente adatto al calcolo con elaboratori elettronici.

Il problema di Snellius-Pothenot insieme al problema di Hansen o dei due punti inaccessibili, dal nome dell'astronomo danese Peter Andreas Hansen (1795-1874), sono casi particolari del problema di Marek o dei quattro punti inaccessibili trattato da Johann Marek nell'opera *Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters* (1875). Altri autori si sono interessati al problema trovandone anche soluzioni analitiche o grafiche alternative: ricordiamo Collins (1671), Lambert (1765), Cagnoli (1786), Bessel (1813), Gauss (1823), Burchkardt (1825), Galkiewicz (1935), Gerling (1840) e, in tempi più recenti, Attilio Selvini, Renato Righi e Fabrizio Casotto.

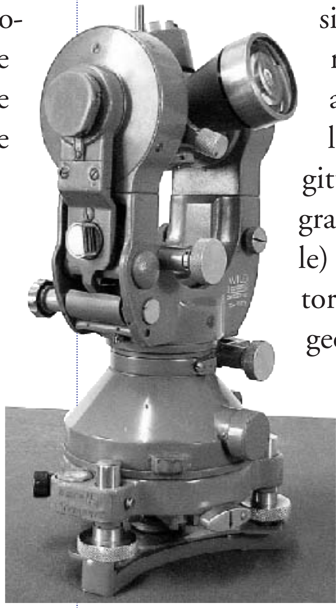
Sulla falsa riga del problema topografico di cui sopra, l'ing. Giuseppe Matarazzo [2] ha studiato una soluzione numerica, basata su di un sistema di tre equazioni trascendenti non lineari a tre incognite, per determinare le coordinate geografiche (latitudine e longitudine) di una qualsiasi località sul globo terrestre con la sola misura di tre angoli orizzontali di tre stelle di coordinate note (ascensione retta e declinazione).

Operativamente si tratta di collimare tre stelle dal luogo incognito mediante uno strumento (bussola magnetica, tacheometro, teodolite, geodimetro, etc.) effettuando le letture al cerchio graduato orizzontale e annotando i rispettivi tempi di rilevamento con un orologio (meglio se di tipo radio-controllato).

Lo scarto tra le coordinate geografiche trovate con quelle reali sarà molto minore (nullo nel caso teorico) quanto maggiore sarà la precisione dei dati misurati (angoli e tempi) e dal tipo di strumentazione utilizzata. Si avrà cura, inoltre, di eliminare preventivamente gli errori grossolani e ripetere l'operazione con una tripletta stellare differente come riprova.

Inoltre, rispetto al tradizionale e consolidato metodo utilizzato nella navigazione astronomica delle rette d'altezza [3] con sestante e cronometro definito dallo statunitense Thomas Hubbard Sumner (1807-1876) nell'opera *A New and Accurate Method of Finding a Ship's Position at Sea, by Projection on Mercator's Chart* (1843 su lavori e scoperte del 1837) e dal francese Adolph Laurent Anatole Marcq de Blond Saint-Hilaire (1832-1889) con le *Note on the Determination of Position* (1873) e *Calculation of the Observed Position* (1875), non effettuando misure di altezza degli astri si ha il vantaggio di non dover effettuare correzioni per la rifrazione atmosferica.
In particolare, la procedura da seguire è la seguente:
1) si sceglie una tripletta stellare visibile dal luogo incognito (con declinazioni, preferibilmente, non superiori a ±80° e con posizioni relativamente distanti fra loro) dal catalogo stellare astrometrico FK5/J2000.0 [4];
2) si collima ciascuna stella misurandone l'angolo orizzontale (la cui origine, la stessa per tutte le misure angolari, può essere un riferimento qualsiasi arbitrariamente scelto) e annotando, contemporaneamente, il tempo di rilevamento (al secondo) necessario per la determinazione del Tempo Siderale Medio a Greenwich TSMG e per la correzione precessionale;

3) si predispongono i valori da utilizzare e si inseriscono i dati (tre ascensioni rette, tre declinazioni, i tre angoli orizzontali nonché i valori iniziali della latitudine, longitudine e l'azimut origine della graduazione del cerchio orizzontale) nel programma fornito dall'autore [2] ottenendo le coordinate geografiche del luogo incognito.



Teodolite ottico-meccanico Wild T2 (Heerbrugg, Svizzera) dal costruttore Heinrich Wild (1877-1951) (Università di Pisa – Dipartimento di ingegneria civile, topografia e fotogrammetria)

Per quanto riguarda le coordinate astronomiche equatoriali (ascensione retta e declinazione) bisogna considerare che quelle fornite dai cataloghi stellari (riferite per un'epoca e un equinozio definiti) devono essere trasformate nelle corrispondenti all'epoca ed equinozio medi della data del rilevamento, tenendo conto dell'effetto della precessione e dell'effetto del moto proprio della stella. Pertanto, per ogni oggetto della tripletta stellare scelta, si procede alla riduzione delle coordinate. Di seguito si riporta un esempio. Dal Fifth Fundamental Catalogue FK5 Basic [4] si sceglie la stella

α Aquilae (Altair) 745 FK5 125122 SAO 187642 HD
posizione media della stella per epoca ed equinozio J2000.0:
AR_{2000} 19h 50m 47.002s δ_{2000} +08° 52' 06.03"
moto proprio annuo riferito per epoca ed equinozio J2000.0:
+0.03629s in AR +0.3863" in δ

Ridurre le coordinate all'epoca e all'equinozio medi all'istante 12.12 dicembre 2020 (ossia 12 dicembre 2020 alle ore 2h 52m 48s corrispondente al tempo rilevato con l'orologio nel momento della misura dell'angolo orizzontale):

Calcolo del Julian Day JD (formula di Jean Meeus [5]), con Y = anno, M = mese e D.d = giorno.frazione

se M > 2 allora Y=Y e M=M
se M=1 o 2 allora Y=Y-1 e M=M+12
se Y.MDd ≤ 1582.1015 (calendario gregoriano) allora A=INT(Y/100) e B=2-A+INT(A/4)
se Y.MDd < 1582.1015 (calendario giuliano) allora A=B=0
Per gli anni a.C., Y è negativo.

$$JD_0 = INT[365.25(Y+4716)] + INT[30.6(M+1)] + D + B - 1524.5$$
$$JD_{data} = INT[365.25(Y+4716)] + INT[30.6(M+1)] + D.d + B - 1524.5$$

Da cui

$$JD_0 = 2459195.5$$
$$t = (JD_0 - 2451545.00_{2000})/36525 = +0.209459274 \text{ secoli giuliani}$$
$$= 20.9459274 \text{ anni giuliani}$$

$$JD_{data} = 2459195.620$$
$$t_{data} = (JD_{data} - 2451545.00_{2000})/36525 = +0.20946256 \text{ secoli giuliani}$$
$$= 20.94625599 \text{ anni giuliani}$$

Calcolo effetto del moto proprio

$$+0.03629s \times 20.94625599 = +0.760s \text{ in AR}$$
$$+0.3863'' \times 20.9465599 = +8.092'' \text{ in } \delta$$

Coordinate della stella per l'equinozio medio J2000.0

$$AR_0 \; 19h\ 50m\ 47.002s + 0.760s = 19h\ 50m\ 47.762s$$
$$(= 19.84660056h \times 15° = 297.6990083°)$$
$$\Delta_0 \; +08°\ 52'\ 06.03'' + 8.092'' = +08°\ 52'\ 14.122''$$
$$(= 8.103922778°)$$

Coordinate della stella per l'equinozio medio J2020.0 ed epoca 12.12 dicembre 2020
(formule precessionali di Simon Newcomb 1835-1909, *A Compendium of Sherical Astronomy*, Macmillan New York USA 1906 con valori relativi al nuovo sistema standard FK5/J2000.0 dovuti al lavoro degli astronomi Jay Henri Lieske, Trudpert Lederle, Walter Ernst Fricke e Bruno Morando [5] [6])

$$\eta = 2306.2181t + 0.30188t^2 + 0.017998t^3 =$$
$$= +483.0798'' = +483.0798'' / 3600'' = +0.134189°$$
$$z = 2306.2181t + 1.09468t^2 + 0.018203t^3 =$$
$$= +483.1145'' = +483.1145'' / 3600'' = +0.134198°$$
$$\theta = 2004.3109t - 0.42665t^2 - 0.041833t^3 =$$
$$= +419.8090'' = +419.8090'' / 3600'' = +0.116614°$$

$$A = \cos\delta_0 \sin(AR_0+\eta) = -0.873733492$$
$$B = \cos\theta\cos\delta_0\cos(AR_0+\eta) - \sin\theta\sin\delta_0 = +0.460999782$$
$$C = \sin\theta\cos\delta_0\cos(AR_0+\eta) + \cos\theta\sin\delta_0 = +0.155141823$$

$$AR_f = z + \mathrm{arctg}(A/B)$$
$$\delta_f = \arcsin(C)$$

Se l'oggetto è in vicinanza dei poli celesti (com δ_0 maggiore di ±80°) sarà opportuno utilizzare, in alternativa, δ_f=arccos$(A^2+B^2)^{0.5}$

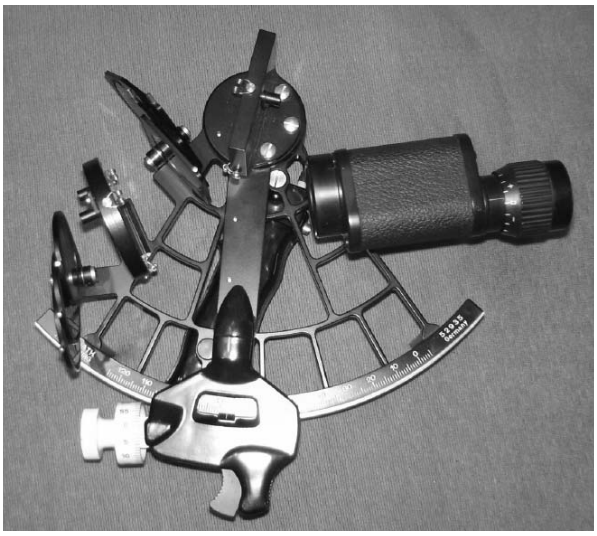
$$AR\text{-}z = \mathrm{arctg}(A/B) = -62.18294807° = 297.8170519°$$
$$AR_{2020} = +297.8170519° + z = +297.9512499° / 15° = 19.86341666h = 19h\ 51m\ 48.300s$$
$$\delta_{2020} = +8.925021612° = +8°\ 55'\ 30.078''$$

Per quanto riguarda il Tempo Siderale Medio di Greenwich TSMG esso si può ottenere mediante la seguente formula [5]:

$$TSMG' = 0.279057273+(100.002139038+0.000001078t-0{,}000000000071t^2)*t$$
$$TSMG_0=[TSMG'-\mathrm{intero}(TSMG')]*24$$

che, per i valori di JD_0= 2459195.5 e t= +0.209459274 ricavati in precedenza, fornisce il valore di 21.225432862 *rivoluzioni* per il TSMG'. La parte frazionaria moltiplicata per 24 fornisce il $TSMG_0$ del 12 dicembre 2020 a 0h ossia 5h 24m 37.39s. Per ottenere il TSMG all'istante della data (ossia alle 2h 52m 48s) si moltiplica per 1.00273790935 (= 2.887885178 da cui 2h 53m 16.39s) ottenendo il risultato cercato di 8h 17m 53.78s.

Per la determinazione sia del TSMG sia delle coordinate precessate alla data, come in precedenza visto, è possibile utilizzare il seguente foglio di calcolo [7].



**Sestante Plath (Hamburg, Germania)
dal costruttore Carl Christian Plath (1825-1910)
(collezione Gaetani Brancadori)**

Benché oggi la determinazione delle coordinate geografiche avviene speditamente con l'uso del GPS si tratta pur sempre di una interessante alternativa al metodo classico col sestante unita alla potenza dei moderni elaboratori elettronici.

RIFERIMENTI

[1] Costantini, Pier Francesco. *Il problema di snellius-Pothenot* www.itgcanova.it/docenti/prof_costantini/Snellius-Pothenot.pdf
[2] Matarazzo, Giuseppe. *Coordinate geografiche di una località noti gli angoli orizzontali di tre stelle* (2004) http://astrodinamica.altervista.org/PDF/3az.pdf
[3] Flora, Ferdinando. *Astronomia nautica (Navigazione astronomica)*, Hoepli, Milano 5ª ed. 1982 pp. 406-494
[4] Fifth Fundamental Catalogue FK5 Basic Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg n. 32 (1988) www.ari.uni-heidelberg.de/publikationen/vhd/vhd032/vhd032.htm
[5] Meeus, Jean. *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Richmond Virginia USA 1991 pp. 59-66, pp 83-85 e pp.123-130
[6] Magni, Tiziano. "Le formule per il calcolo rigoroso della precessione", *l'Astronomia* 121/1992 pp.46-47
[7] Mazzucato, T. Michele. *Modulo per il calcolo della riduzione delle coordinate equatoriali (AR, δ) dall'epoca J2000.0 alla data in esame e Modulo per il calcolo del Tempo Siderale Medio a Greenwich TSMG alla data in esame* (2008) www.matematicamente.it/approfondimenti/astronomia/modulo_per_il_calcolo_della_riduzione_delle_coordinate_equatoriali_200804053024/

114. Matematica e Arte

di Giuseppe di Saverio

Quando ho sostenuto l'Esame di Maturità Scientifica, nel 1996, una delle tracce del compito di italiano era sul rapporto tra la matematica e la poesia. Non ho svolto quel tema perché credevo di non esserne in grado (infatti non lo ero) e perché, nonostante avessi più volte sentito fare quell'accostamento, mi sembrava che tra le due discipline non vi fosse nessuna affinità.

Oggi so esprimere un'opinione precisa sull'argomento, che rimane, comunque, estremamente problematico e soggettivo. Infatti le convinzioni che si possono avere su questa questione discendono direttamente dalle definizioni che si assumono di "poesia", e più in generale di "arte", e di "matematica".

Come è noto, dire cos'è l'arte e dire cos'è la matematica costituiscono due millenari problemi (irrisolti…) della filosofia, in particolare dell'estetica e della filosofia matematica.

Espongo subito il mio punto di vista, per poi analizzare brevemente come i profondi e radicali sconvolgimenti della filosofia matematica nell'ultimo secolo e mezzo abbiano modificato la collocazione della matematica nella cultura, e quindi anche i suoi rapporti con le altre discipline, compresi quelli con l'arte. Non affronterò il problema simmetrico, cioè di come è variata la collocazione reciproca delle due discipline al variare del concetto di arte nella storia. La definizione di "arte" che assumerò deriva da una mia convinzione personale, ma credo che essa possa essere in buona misura condivisa da molti lettori, almeno se riferita all'arte contemporanea. Questo breve articolo, naturalmente, non aspira ad essere né organico né completo.

Io credo che la matematica e l'arte siano profondamente connesse poiché entrambe costituiscono un tentativo umano di esplorare, descrivere e comunicare, attraverso un linguaggio, delle realtà interiori universali (ovvero condivise da tutta l'umanità, indipendenti dallo spazio e dal tempo), magmatiche, insondabili e, io credo, per loro natura non completamente esprimibili. Quelle che io ho chiamato realtà interiori sono: nel caso della matematica, i concetti di quantità e di forma, ovvero di numero e di figura, e le corrispondenti capacità di contare e di misurare; nel caso dell'arte le emozioni, i sentimenti, gli ideali, i principi…

Prima di chiarire meglio questa affermazione vorrei mettere in evidenza che le differenze tra le due discipline risiedono, oltre che, come detto, nella specificità degli oggetti della loro speculazione, nel loro linguaggio e nella loro finalità. La matematica si propone di indagare, in modo razionale, sistematico e oggettivo, le innate intuizioni di quantità e forma e di esprimerle, con un linguaggio artificiale, freddo ed essenziale, all'interno di una rigida struttura organica e coerente, che ricostruisca nel modo più fedele possibile la struttura mentale in cui sono incastonate quelle intuizioni. L'arte, al contrario, si propone di indagare alcuni aspetti dell'animo umano in modo assolutamente frammentario e soggettivo. Essa vuol fornire, attraverso linguaggi sempre più nuovi ed originali, artificiali o naturali (come il linguaggio del corpo), solo delle "istantanee" particolari dell'interiorità umana, che la evochino appena; non cerca, anzi rifugge, una sua ricostruzione organica: quando fa questo l'arte sconfina nella filosofia.

È mia convinzione che le realtà interiori indagate dall'arte e dalla matematica non derivano dalla realtà materiale, anzi la precedono. Può succedere che alcune situazioni e oggetti materiali le evochino, non che le generino. Così, per esempio, può darsi che gli occhi di una donna evochino il nostro ideale di bellezza; un povero mendicante la nostra pietà; una interminabile fila di formiche l'infinito discreto; i binari di una ferrovia il parallelismo tra rette, ecc… Se non avessimo già den-

tro di noi le strutture capaci di farci recepire quelle cose in quel modo, noi avremmo solo una percezione materiale del mondo, e gli occhi della ragazza, il mendicante, le formiche, i binari… ci apparirebbero solo in quanto tali; rappresenterebbero per noi solo se stessi.
Dicevo sopra che gli oggetti della speculazione della matematica e dell'arte sono "universali" e "inesprimibili". Cerco di chiarire queste affermazioni. Sulla universalità degli oggetti matematici mi pare non ci siano troppi dubbi (dei pochi dubbi sollevati nel corso della storia parlerò nel seguito). Io credo che non dovrebbero essercene nemmeno su quella dei sentimenti, delle emozioni e degli ideali, comunicati dagli artisti. Come potrebbe un poeta aspirare ad emozionare un lettore comunicandogli un sentimento che non gli appartiene? Perché mai ci si dovrebbe commuovere nel guardare un quadro se esso non ci comunicasse un tema a noi caro, se pur inconsciamente? Quale musica ci potrebbe estasiare se le sue note non toccassero qualche tasto sensibile della nostra anima? In realtà l'opera d'arte è, aspira ad essere, per il suo fruitore, come i begli occhi della ragazza di prima: solo un segno per qualcos'altro, una incarnazione particolare di una cosa generale ed astratta. Se l'artista è bravo, la sua opera svolgerà bene la sua funzione, ovvero comunicherà molto; se è meno bravo la sua opera sarà meno comunicativa. Nel primo caso egli sarà considerato un artista maggiore, nel secondo caso un minore. Spesso si sbaglia credendo che gli artisti siano dotati di una sensibilità maggiore degli altri uomini. Essi non sentono di più, comunicano meglio. Chissà quanti uomini hanno provato lo stesso senso di vaghezza che Leopardi ha espresso nell'*Infinito*! Almeno tutti quelli che si emozionano leggendo quella poesia. Tuttavia solo Leopardi ha saputo scriverlo così bene.
Dunque le cose che l'arte esprime non sono soggettive. Potrebbero, semmai, essere soggettive le emozioni che quelle cose suscitano (legate a ricordi, visi, situazioni che appartengono solo al vissuto del singolo fruitore dell'opera d'arte). D'altra parte esse sono anche indipendenti dallo spazio e dal tempo. Un bravo artista di 1500 anni fa riuscirà a comunicare il suo messaggio anche agli uomini che tra mille anni vivranno dall'altra parte del mondo (se essi avranno decifrato il suo linguaggio). Se ciò non avvenisse, quello non andrebbe considerato un artista, per definizione, o, comunque, sarebbe un artista di basso livello.
Ciò che rende possibile la comunicazione tra matematici ed artisti e i fruitori delle loro opere è l'umanità che li accomuna, oltre lo spazio e il tempo. I linguaggi utilizzati dalla matematica e dall'arte possono variare con i gusti del tempo e del luogo, ma la natura ultima della materia del loro interesse rimane la stessa. La matematica greca per noi è perfettamente comprensibile, poiché descrive qualcosa che noi continuiamo a "vedere" così come i greci vedevano. Euclide definisce la retta in un modo, noi in un altro che ci pare più preciso, ma la retta rimane la stessa. Possiamo ritenere poco efficace (rigorosa) la descrizione (definizione) che Euclide dà di questo oggetto e darne una che ci sembra migliore proprio perché sappiamo che l'oggetto di cui egli parlava è lo stesso di cui noi parliamo. Una cosa analoga avviene nell'arte. È più che probabile che molti artisti abbiano cercato di comunicare uno stesso sentimento, ma ognuno di loro l'ha fatto in modo diverso dagli altri. Sfumature diverse, diversi linguaggi e modalità espressive. Scatti diversi dello stesso soggetto.
Come ho detto, ritengo che gli oggetti indagati dalla matematica e dall'arte siano caratterizzati da una intrinseca inesprimibilità. Anzi, di più: mi pare che tale inesprimibilità sia l'unica vera ragione che rende possibile, opportuna, addirittura indispensabile la loro esistenza.
Gli stati d'animo, le sensazioni, le percezioni interiori che gli artisti cercano di comunicare sono talmente sfuggevoli da non lasciarsi rappresentare pienamente da nessun segno. Sono entità immateriali che non possono essere intrappolate nella materia, né in sue manipolazioni o emanazioni. Pensateci. Se vi fosse un oggetto o una combinazione di segni materiali di qualsiasi genere (grafici, sonori, cinetici, elettromagnetici…) che potessero dirci esaurientemente e definitivamente cos'è l'amore, perché mai poeti, pittori, musicisti dovrebbero continuare ad affannarsi nella ricerca di "parole" nuove? Basterebbe prendere quell'oggetto, guardarlo, dire: "bene, è vero, l'amore è questo, lo riconosco", e nessuno più si azzarderebbe a toccare l'argomento. Le cose, per fortuna, non vanno così. Tutti lo sappiamo bene.

Non si può comunicare a pieno ciò che si prova. Ne sono testimonianza alcune espressioni usate nel linguaggio comune: "provo una gioia indicibile"; "il mio dolore è così grande che non si può dire"; "non so neanche dirti quanto ti amo"; "non ci sono parole per esprimere la mia riconoscenza"; ecc…

I poeti hanno spesso esplicitato nelle loro opere l'ineffabilità della materia in oggetto. Cito alcuni esempi famosi: "Ahi quanto a dir qual era è cosa dura…", Dante Alighieri; "Non chiederci la parola che squadri da ogni lato / l'animo nostro informe, e a lettere di fuoco / lo dichiari e risplenda come un croco / perduto in mezzo a un polveroso prato. / Ah l'uomo che se ne va sicuro, / agli altri ed a se stesso amico, / e l'ombra sua non cura che la canicola / stampa sopra uno scalcinato muro! / Non domandarci la formula che mondi possa aprirti, / sí qualche storta sillaba e secca come un ramo. / Codesto solo oggi possiamo dirti, / ciò che non siamo, ciò che non vogliamo." Eugenio Montale.

Per la matematica le cose non vanno diversamente. Lo sforzo introspettivo compiuto dal matematico non è dissimile da quello compiuto dall'artista. Così pure è simile lo sforzo descrittivo. L'immagine classica della lampadina che si accende in testa all'arrivo dell'idea descrive bene il momento della visione matematica, l'istante della rivelazione. È come se, al matematico che cerca di capire come sono fatti gli oggetti che riesce ad intravedere, all'improvviso la "verità" si mostrasse chiara e distinta, senza più veli, in tutta la sua perfezione. Da questo momento in poi egli deve lavorare duramente per descrivere ciò che ha visto. Deve utilizzare il linguaggio in modo opportuno, oppure inventarne uno completamente nuovo, al fine di essere comprensibile agli altri. Questo non è affatto facile. Per decifrare gli scritti di Evariste Galois ci sono voluti molti anni.

Naturalmente una stessa idea matematica, una stessa visione, può essere comunicata in modi e linguaggi diversi. La qualità del matematico si misura dall'efficacia della comunicazione. Cantor e Galileo hanno avuto la percezione dell'infinito discreto in modo molto simile, tuttavia solo Cantor è riuscito ad esprimerlo così genialmente. Potrebbe succedere che nel futuro qualcuno esporrà i concetti espressi da Cantor in un linguaggio ancora più chiaro, inquadrandoli in una struttura più ampia, così come è successo per la geometria di Euclide e per l'algebra di Cardano. Da circa 2500 anni l'umanità combatte con il concetto di infinito, eppure le pubblicazioni matematiche sull'infinito continuano ad aumentare. Se ci fosse un sistema per descrivere una volta per tutte lo spazio euclideo in modo esaustivo, non ci sarebbe più bisogno di ricercare oltre su quell'argomento. Basterebbe un manuale da consultare.

Gli oggetti matematici infiniti sono anche molto suggestivi in quanto sono affetti, per così dire, da una ineffabilità tecnica, all'interno dei linguaggi discreti finiti, cioè quelli in cui le "parole" sono stringhe finite di segni appartenenti ad un alfabeto finito. Per esempio, un qualsiasi numero irrazionale non può essere scritto nella notazione posizionale (qualsiasi sia la base), in quanto risulterebbe infinito e non periodico. Si sarebbe costretti dunque ad indicare quel numero con un nuovo simbolo. Tuttavia, di numeri irrazionali ce ne sono "troppi" per poter praticare questa via. Infatti essi sono una infinità più che numerabile, così che il numero di simboli da inventare sarebbe "troppo elevato": per quanto esso possa essere grande non sarebbe mai sufficiente; esso non sarebbe neppure ottenibile tramite un'infinità numerabile di combinazioni finite di un numero finito di simboli (cosa che invece è possibile per i razionali…). Anzi, peggio: con questo metodo non si riuscirebbe neppure solo a "nominare" tutti gli irrazionali compresi tra due qualsiasi di essi. Questa situazione è, diciamo così, spiacevole ma abbastanza comprensibile: visto che i numeri irrazionali sono degli strani oggetti più attinenti alle grandezze continue, ovvero alla geometria, che non a quelle discrete, ovvero all'aritmetica, non stupisce che mal sopportino la combinatoria.

L'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili (ovvero dei numeri irrazionali) è cosa nota dal V secolo a.c. Per più di due millenni la trattazione matematica di questi oggetti è rimasta quella greca, ma nel XIX secolo Dedekind, sulla scia di Cantor, ha sentito l'esigenza di ridefinirli in modo diverso, a partire dalla teoria degli insiemi. Egli deve aver avuto la convinzione che la matematica greca fosse troppo approssimativa su questo argomento, o troppo ridondante; deve cioè aver ritenuto necessaria la sua opera perché quelle entità immateriali, i numeri irrazionali, venissero comunicate all'umanità più dettagliatamente. Come per Dedekind nella matematica, così deve essere stato per i cubisti nella pittura, per i poeti della Beat Generation nella poesia, per i Beatles nella musica.

Devo ammettere di avere l'assoluta convinzione, naturalmente non "dimostrabile", che le emozioni ed i sentimenti siano dotati di una natura magmatica, informe, cangiante e continua che è esattamente la stessa dei numeri irrazionali. Non mi stupirei se la medicina scoprisse che esiste uno stesso meccanismo cerebrale (o una stessa area ben nascosta del cervello), non ancora scoperto, attraverso il quale percepiamo queste cose. Se così fosse, la non esprimibilità attraverso linguaggi discreti sarebbe tecnicamente la stessa. Se i sentimenti fossero "oggetti continui" non potrebbero essere espressi con nessun oggetto materiale, che rimane pur sempre solo una disposizione nello spazio di un numero finito di particelle (naturalmente se si accetta l'"ipotesi atomica", ovvero che la materia sia costituita da singole particelle distinguibili l'una dall'altra).

Qui il discorso si potrebbe complicare molto. L'argomento è delicatissimo. Infatti, se pur è vero che un qualsiasi oggetto materiale è una combinazione di un certo numero di particelle, dunque un oggetto discreto, noi possiamo aver di esso un'immagine continua, se lo percepiamo in un unico istante. Un foglio di carta possiamo vederlo come un rettangolo sebbene esso sia un insieme abbastanza sparpagliato di punti (molecole). È come se fossimo dotati di un software che, attraverso una provvidenziale "miopia", ci permette di non vedere a fondo nella materia e di interiorizzare in modo ordinato, secondo il nostro senso dello spazio ideale, ciò che è disordinato; di rendere unico ciò che è molteplice; di dare forma all'informe, di rendere perfetto ciò che è imperfetto. D'altro canto, dello stesso oggetto potremmo avere anche una percezione discreta, se di esso cogliessimo solo alcune sue parti, ordinandole nel tempo. Lo stesso foglio di carta, oltre che il rettangolo, potrebbe rappresentare il numero 1, oppure il 4 se guardassimo ai suoi vertici uno per volta (uno, due, tre e quattro), oppure un numero enorme se ci prendessimo la briga di contare le sue molecole una ad una. Tuttavia, tornando all'ipotesi atomica, se è vero che la materia è fatta di particelle, è evidente che, da un punto di vista tecnico, "per definizione" direi, si possono esprimere materialmente solo gli oggetti finiti (il numero naturale 3 è ben rappresentato da tre particelle), o infiniti discreti (nell'ipotesi inverosimile di avere infinite particelle a disposizione).

Come ho detto, l'affinità tra matematica e arte risiede nella loro natura ultima: entrambe sono una continua e infinita ricerca di segni che rappresentino ai nostri simili le nostre anime e le nostre menti; la differenza risiede nei linguaggi utilizzati, nelle finalità e nella diversa natura degli oggetti immateriali indagati. C'è, a tal proposito, da fare un'importante osservazione.

Può succedere che l'arte faccia oggetto della propria indagine anche alcuni temi che propriamente, e storicamente, appartengono all'ambito matematico, ma che pur sempre fanno parte dell'interiorità. Si riscontrano innumerevoli casi di tal genere soprattutto nelle arti figurative contemporanee. In queste opere l'artista cerca di fornire delle istantanee del proprio senso interiore dello spazio. Così come in genere si occupa di emozioni e sentimenti intesi in senso più tradizionale (inquietudine, solitudine, gioia…), in queste opere l'artista elegge la propria intuizione spaziale a tema d'arte. La geometria, che è per il matematico tema da razionalizzare e ricostruire organicamente tramite un linguaggio, diviene per il pittore semplice visione da mostrare, come si mostra l'amore. Allora diviene emozione artistica e, dunque, nel linguaggio cifrato dell'arte diviene simbolo di "bellezza".

Recentemente capita spesso anche che alcuni artisti adoperino rappresentazioni grafiche (spesso ottenute al computer) di oggetti matematici complessi (come i frattali) per arricchire le loro opere. Essi sfruttano alcune caratteristiche di quegli oggetti (come le simmetrie, le colorazioni o l'autosimiglianza) in modo simbolico per esprimere altro. Ovvero utilizzano rappresentazioni di oggetti matematici come elementi di un linguaggio artistico.

La matematica, dunque, al servizio dell'arte. Questo utilizzo artistico della matematica viene spesso citato come prova del collegamento tra le due discipline. Io non credo che sia così. Il fatto che un artista utilizzi un frattale per esprimere le sue emozioni non ha nulla a che vedere con l'affinità che esiste tra matematica e arte. Gli artisti utilizzano molte cose, non solo frattali e oggetti simmetrici. Le installazioni di arte contemporanea sono strutture stranissime e molto eterogenee. Vi si incontra di tutto. Non perché un artista adopera un particolare acido si sostiene un collegamento tra l'arte e la chimica. Il questi casi l'artista utilizza il frattale così come utilizza il marmo, il legno, la tempera: solo come strumento.

Naturalmente molte obiezioni, di ogni genere, potrebbero essere sollevate contro le mie argomentazioni. Vorrei provare a controbattere almeno una di queste obiezioni, la più ovvia e, forse, la più acuta. Essa sarebbe la seguente: "Se la matematica e l'arte sono affini solo perché entrambe sono discipline umane che indagano alcuni aspetti interiori, allora tutte le discipline sono affini, persino matematica ed arboricoltura, poiché tutte sono attività umane". Io rispondo che sì, l'essere attività umane accomuna tutte le discipline in questa minima misura. La matematica ha dunque il minimo grado di affinità anche con l'arboricoltura, ma con l'arte, come sto sostenendo, ha un'affinità maggiore.

Sarebbe allora interessante cercare di capire qual è la disciplina più affine alla matematica, e come si colloca l'arte in una sorta di classifica di "vicinanza". Senza alcun dubbio è la filosofia la disciplina che più somiglia alla matematica, per la natura degli oggetti di indagine, per le sue finalità, per l'organicità delle costruzioni teoriche. Subito dopo, a mio parere, si collocano arte e scienze naturali (in particolare la fisica) a pari merito, ma per motivi diversi. La stretta relazione tra matematica e fisica sembra essere una cosa molto ovvia. In tutta la storia della scienza (specie in quella moderna e contemporanea) essa è evidentissima. Ma in cosa davvero la matematica e la fisica sono simili? La risposta più immediata sarebbe che entrambe hanno a che fare con numeri, figure, grafici, curve e altre "cosacce" del genere. Si sa: a scuola sono sempre le stesse persone ad essere brave in matematica e in fisica; sono quelli che sanno fare i "conti", i "problemi"… Insomma sono quelli, come dicono i professori, portati per le materie scientifiche.

Se per "fisica" si intende la scienza che cerca di prevedere qualitativamente e quantitativamente il comportamento della materia (evito di affrontare la distinzione tra fisica ed altre scienze naturali, come la chimica, la biologia…), mi pare evidente che essa sia assolutamente lontana dalla matematica per quel che riguarda l'oggetto di studio ed il suo fine ultimo. Io credo, infatti, che la forte affinità tra queste due discipline vada individuata esclusivamente nel fatto che la fisica adotta come suo unico linguaggio quello matematico. Non mi soffermo sull'affascinante (ma difficile) tema di discussione riguardo alla "matematicità" della natura.

Come si diceva sopra, la matematica, la fisica, la chimica… sono classificate come "materie scientifiche", in contrapposizione alla letteratura, la storia, la filosofia, la storia dell'arte…, cioè le "materie umanistiche". Queste due famiglie in cui il sapere viene suddiviso sembrerebbero del tutto aliene l'una all'altra. In quasi tutte le città universitarie, addirittura, le facoltà scientifiche sono urbanisticamente lontane da quelle umanistiche. Nell'antichità la figura del matematico era quella di un uomo dedito ad un'attività speculativa e contemplativa delle leggi dell'intelletto, che lo inserivano a pieno titolo in quell'ambito culturale che potremmo genericamente definire "umanistico", accanto al filosofo ed al letterato. Già dall'inizio dell'epoca moderna la sua attività inizia a perdere l'antica purezza per asservirsi alla tecnica, al mercato ed alla politica: la matematica greca era pura; quella moderna rinasce per esigenze applicative. Nonostante ciò, almeno fino al XVIII secolo il matematico era un uomo di vasta cultura e pienamente inserito nel dibattito intellettuale del suo tempo. Con l'avvento delle rivoluzioni industriali e successivamente quelle tecnologiche, la matematica, come anche altre discipline, ha subito un processo di frammentazione ed iperspecializzazione, che ha definitivamente demolito l'unità culturale della matematica ed i suoi collegamenti con le altre branche del pensiero puro. Oggi, agli occhi dell'opinione pubblica un matematico è solo uno "scienziato" al servizio della tecnica. La sua funzione sociale non è più la ricerca della "verità", ma solo quella, pur utile, di fornire alla tecnica ed alla tecnologia strumenti di lavoro. Nelle scuole superiori si tende a privilegiare della matematica l'aspetto tecnico ed algoritmico, a discapito di quello epistemologico, storico, filosofico, umanistico. Figurarsi quello "artistico"! Nella esposizione dei vari argomenti (sia alle scuole superiori che all'università), si perde completamente la percezione del suo sviluppo storico. Cose lontanissime si ritrovano fianco a fianco sullo stesso piano, quello manualistico. Il risultato è una catastrofe culturale. Agli occhi di uno studente di liceo, imparare a risolvere un'equazione deve sembrare come imparare ad usare il suo telefonino o la lavastoviglie di sua madre: un'attività mnemonica e meccanica, con l'aggravante dell'inutilità. Come ci si può stupire poi se le facoltà di matematica sono poco frequentate? Se la matematica è questo, si diranno, allora meglio fare l'ingegnere, si guadagna di più. Tutta la storia contemporanea, d'altra parte, ha glorificato le scienze fisiche e naturali, dimenticando completamente quelle matematiche. Tutti conoscono Einstein, Fermi, Volta, Marconi. Cantor, Hilbert, Peano, Dedekind sono, al contrario, perfetti sconosciuti per i non addetti ai lavori.

Per capire come mai la collocazione della matematica si sia spostata così evidentemente dall'ambito umanistico a quello scientifico-tecnologico, è forse utile ripercorrere brevemente le principali tappe dell'evoluzione del concetto di "matematica" nella storia occidentale.

Dall'antichità, fino al XVIII secolo, la filosofia comunemente accettata è stata il platonismo, ovvero il complesso dei principi di Platone riguardo alla matematica. In sintesi il platonismo consiste in un assoluto realismo: gli oggetti matematici sono dotati di un'esistenza (eterna e immutabile) immateriale, ma reale, del tutto indipendente dalla (natura della) mente di chi li pensa e li specula, dallo spazio e dal tempo. Essi sono collocati, insieme a tutte le idee perfette e immutabili, in un mondo intangibile (Iperuranio o Mondo delle Idee) raggiungibile solo dall'intelletto.

Nel XVIII secolo Immanuel Kant diede una nuova sistemazione filosofica ai fondamenti della matematica: il platonismo viene sostituito dal kantismo. Kant ritiene che le proposizioni della matematica siano giudizi sintetici a priori (*sintetico*, in opposizione ad *analitico*, vuol dire che il predicato non è contenuto nell'oggetto, cioè aggiunge qualcosa all'oggetto stesso…; *a priori*, in opposizione ad *a posteriori*, vuol dire che non deriva dall'esperienza sensibile) relative alle intuizioni pure di spazio e di tempo. Spazio e tempo sono quadri mentali a priori entro cui connettiamo i dati fenomenici. Lo spazio è la forma del senso esterno e si occupa dell'intuizione della sola disposizione delle cose esterne. Il tempo è la forma del senso interno e regola la successione delle cose esterne. Spazio e Tempo, non sono entità a sé stanti, ma sono quadri mentali, propri dell'uomo. Kant, dunque, riconosce come fondamenti della matematica le due intuizioni di spazio e tempo, le quali genererebbero nell'uomo i concetti di misura e quantità, che sono alla base, rispettivamente, della geometria e dell'aritmetica. Ovvero, la geometria usa intuitivamente il concetto di spazio e l'aritmetica fa lo stesso con il concetto di tempo, cioè di successione, senza ricavarli da altro.

Pur presentando differenze concettuali non trascurabili (Platone, a differenza di Kant, ritiene che gli oggetti matematici siano dotati di una esistenza propria, indipendente dall'uomo…) platonismo e kantismo sono accomunate da un assolutismo di fondo che li conduce ad una semplice sostanziale conseguenza: la matematica *si scopre*, non *si inventa*. L'attività del matematico, pertanto, si scomporrebbe, in linea con quanto ho sostenuto, nei due fondamentali momenti dell'*osservazione* e della *descrizione*, attraverso un linguaggio. Proprio come l'arte.

Dalla metà del XIX secolo in poi, una serie di avvenimenti (la nascita dell'analisi moderna, l'introduzione di geometrie non euclidee, la matematizzazione della logica, l'aritmetizzazione dell'analisi, ovvero la riduzione del continuo al discreto, la nascita della teoria degli insiemi, la logicizzazione dell'aritmetica, la formalizzazione della geometria, l'insorgere di paradossi nell'insiemistica.) portarono a profonde mutazioni concettuali riguardo alla matematica che condussero, all'inizio del XX secolo, alla crisi dei fondamenti, ovvero ad una importante disputa intellettuale sull'essenza degli oggetti matematici. Coloro che respinsero le filosofie di Platone e di Kant possono essere, in linea di massima, raggruppati in tre scuole di pensiero: il logicismo, l'intuizionismo, il formalismo.

Il logicismo, i cui maggiori esponenti furono Russell e Frege, sosteneva che la matematica fosse completamente identificabile con la logica, e che questa fosse del tutto esprimibile attraverso sistemi assiomatici formalizzabili, i cui assiomi risultano dotati di una naturale autoevidenza.

L'intuizionismo di Brouwer respingeva con decisione le tesi logiciste e riaffermava il carattere puramente intuitivo dei concetti matematici. Riconosceva però come primario solo il concetto di quantità, escludendo quello di forma. Le limitazioni dell'intuizionismo riguardo alle grandezze continue portarono ad una serie di importanti restrizioni ai metodi dimostrativi (Non accettazione del principio del terzo escluso, dunque non accettazione delle dimostrazioni indirette), che condussero a una ricostruzione intuizionista di molte parti della matematica.

Il formalismo di Hilbert sosteneva che il corpo della matematica coincide con tutte le possibili espressioni dei sistemi assiomatici formali, ben costruiti ma arbitrari. Ovvero che la matematica sia un semplice gioco di segni che si combinano secondo delle precise regole, ai quali attribuire eventualmente un significato. Esso, per i formalisti, potrebbe anche essere del tutto lontano da quello classico. Precisò Hilbert: *Si deve sempre poter dire al posto di "punti", "rette", "piani", "tavoli", "sedie", "boccali di birra".* Per i formalisti, tuttavia, i sistemi assiomatici formali dovevano essere dotati di due caratteristiche precise, che ne avrebbero assicurato il buon funzionamento: la *coerenza* e la *completezza*, che, molto approssimativamente, consistono nella non contraddittorietà (ovvero la non dimostrabilità di una proposizione e della sua negazione) e nella decidibilità di ogni possibile proposizione (ovvero la sua dimostrabilità o la dimostrabilità della sua negazione). Poiché tutta la matematica era stata ridotta (con l'aritmetizzazione dell'analisi) all'aritmetica, e quest'ultima era stata espressa tramite un sistema assiomatico formale, per i formalisti era fondamentale riuscire a dimostrare la coerenza e la completezza di quest'ultimo.

Nel 1931, tuttavia, Kurt Gödel dimostrò che se un sistema assiomatico formale che esprima l'aritmetica fosse coerente, la sua coerenza non sarebbe dimostrabile nel suo linguaggio. Dimostrò inoltre che un tale sistema risulterebbe comunque incompleto. I teoremi di Gödel posero fine al programma formalista, e lasciarono tutta la comunità dei matematici in una nuova, surreale, tragica condizione di incertezza riguardo ai fondamenti della propria disciplina.

Nell'era post-gödeliana la filosofia matematica vincente (nella prassi matematica e nella didattica) è stata il *bourbakismo*[1], che si proponeva di riscrivere (riuscendoci per buona parte) tutta la matematica moderna in forma rigorosamente assiomatica, a partire dalla teoria degli insiemi. La parola chiave è *struttura*: all'occhio di Bourbaki la matematica è un insieme di *strutture* astratte. Dunque il bourbakismo è una sorta di recupero postmoderno del formalismo hilbertiano, che conserva di quest'ultimo però solo l'aspetto più prosaico. Agli slanci ideali di Hilbert, Bourbaki sostituisce un sostanziale pragmatismo. Del vecchio "patriottismo matematico" (Hilbert ebbe a dire *Nessuno potrà scacciarci dal paradiso che Cantor ha costruito per noi*), delle sfide intellettuali, non rimane molto. Bourbaki è più cinico di Hilbert. Più che a convincere della sua filosofia, Bourbaki è portato ad imporre la sua filosofia alla società contemporanea, anche attraverso i libri di testo. Tale impresa è riuscita. La matematica che oggi si studia è bourbakista.

Come ho detto, sebbene la crisi vera e propria possa considerarsi chiusa nel 1931, le risposte (non) fornite dai teoremi di Gödel sono risultate insoddisfacenti sia per il matematico che per il filosofo. Una crisi attutita, latente, sotterranea, ha continuato a strisciare fino ai nostri giorni, e aspetta forse solo la scintilla che riaccenda la *querelle*. Fatto sta che oggi la domanda *Cos'è la matematica* è una delle più difficili a cui possa trovarsi a rispondere un matematico. Ognuno ha la sua idea. Ognuno la sua personale eresia. E, in fondo, a nessuno sembra interessare gran che questo argomento. Siamo nell'epoca del fare più che del pensare. Credo che più o meno la stessa sia la situazione degli artisti riguardo alla natura dell'arte.

Ho sostenuto che la matematica studia i numeri e le figure, e che tali oggetti sono universali. Analizzando brevemente la posizione logicista ci si rende subito conto che essa nega con decisione

[1] Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo di un gruppo di matematici, per lo più francesi, che tra il 1935 e il 1983 , ha pubblicato una serie di libri per l'esposizione sistematica di tutta la matematica moderna.

entrambe queste affermazioni. Per Russell l'oggetto di studio è solo la logica. Tutto il resto della matematica è solo applicazione di schemi logici ai concetti di quantità e di forma che tuttavia sono "a posteriori", cioè derivanti dall'esperienza sensibile, dunque relativi e soggettivi. Di universali rimangono forse solo gli assiomi. Russell tuttavia non è molto chiaro su questo punto.
Per i formalisti non rimangono più neanche gli assiomi. Tutto è relativo, per Hilbert, già nel 1900. Non una ma tante geometrie sono possibili. Una "più vera" delle altre non c'è. È solo un accidente il fatto che noi vediamo il mondo in modo "euclideo". Solo una delle tante possibilità, uno dei tanti mondi possibili. Quella euclidea non è una geometria speciale, come la Terra non è un pianeta speciale. Si sa dai tempi di Galileo. Sono solo la nostra geometria ed il nostro pianeta. Ma noi non siamo esseri speciali, come Darwin ci ha spiegato.
Si capisce bene che tali concezioni fanno della matematica più una scienza normativa che una scienza descrittiva, in antitesi con le vecchie filosofie. Per Hilbert la matematica non si scopre, si inventa, anzi, meno, "si costruisce". Cantor non ha "scoperto il Paradiso", ne ha "costruito uno". Uno dei tanti possibili paradisi artificiali. Il matematico non è più il contemplatore-descrittore, ma un "costruttore". Le sue "costruzioni", "strutture" direbbe Bourbaki, non sono "vere". Non debbono esserlo, non possono. Nessuno ha più l'ardire neppure di sperarlo. Non ha neanche più senso chiedersi se lo sono. La "verità" non esiste. Basterebbe, al ribasso, ma almeno questo sì, che fossero "dimostrabili". "Derivabili". Insomma che almeno fossero raggiungibili attraverso un labirinto grafico.
È evidente che se si aderisse a queste scuole di pensiero si avrebbe anche un'idea diversa sul rapporto tra matematica ed arte: se affinità ci fossero andrebbero cercate non nella sostanza, come ho fatto io, ma nella forma, ovvero nel linguaggio, dunque nelle immagini dei frattali, nelle simmetrie dei mosaici e via di seguito.
I teoremi di Gödel posero fine al sogno formalista ma non arrestarono il processo di delocalizzazione culturale in atto. Essi demolirono l'ultima grande filosofia organica della matematica e lasciarono il vuoto. Non riuscirono, e non vollero, restaurare l'assolutismo matematico. D'altra parte, come avrebbero potuto? Nessuna rivelazione passa per una dimostrazione. Nessuna fede può essere giustificata con il calcolo combinatorio. Uno che ha smarrito la fede in Dio non la riacquisterà perché qualcuno ha dimostrato che la non esistenza di Dio non è dimostrabile. Magra consolazione che non potrà confortarlo. Gödel sconfisse un relativismo e ci lasciò il nichilismo.

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT
Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito

Anno 3 Numero 9 – Aprile 2009
Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it