

227. Formule di Molodensky per la trasformazione di datum geodetici

Michele T. Mazzucato

He is probably the only geodesist who would have deserved a Nobel prize

Helmut Moritz in

M. S. Molodensky in Memoriam (2000)

Il datum geodetico è un sistema di riferimento che permette di esprimere in termini numerici la posizione di punti della superficie fisica della Terra o prossimi ad essa. Per le applicazioni geo-topo-cartografiche si impiegano sistemi di riferimento non inerziali solidali con la Terra in cui le coordinate dei punti della superficie terrestre sono, in pratica, invariabili nel tempo.

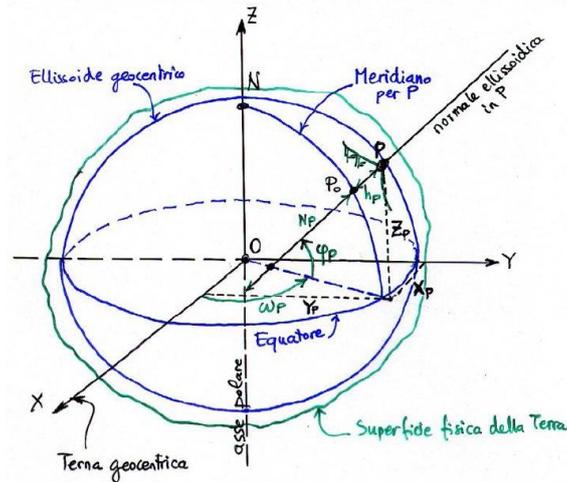
Nella geodesia classica veniva utilizzato un *datum* bidimensionale per la planimetria (*horizontal datum*), basato da un punto di emanazione (vertice trigonometrico fondamentale) e una rete geodetica a cui è associato un modello di ellissoide di riferimento e un datum per l'altimetria (*vertical datum*), basato da un punto a quota zero sul livello medio del mare in un assegnato periodo temporale (caposaldo fondamentale) e una rete di livellazione geometrica di alta precisione a cui è associato un modello di geoide. Per l'Italia continentale il caposaldo fondamentale viene riferito al mareografo di Genova (1942), quello di Catania (1965) per la Sicilia e quello di Cagliari (1956) per la Sardegna.

L'ellissoide di riferimento viene orientato localmente in un particolare punto (punto di emanazione) nel quale vengono imposte le seguenti condizioni geometriche:

- la normale all'ellissoide coincida con la verticale al geoide;
- la direzione del meridiano ellissoidico coincida con la direzione del meridiano astronomico,
- la quota ellissoidica coincida con la quota geoidica.

Pertanto, l'ellissoide orientato localmente, essendo nulle (o convenzionalmente note) sia la deviazione della verticale sia l'ondulazione geoidica, risulta tangente al geoide nel punto di emanazione e, ai fini della planimetria, approssima bene la superficie del geoide nel suo intorno nel quale la deviazione della verticale può essere trascurata per i suoi piccoli valori.

Nella moderna geodesia un datum geodetico globale (tridimensionale planoaltimetrico) è basato su di una terna cartesiana geocentrica ortogonale destrorsa dello spazio X,Y,Z avente origine O nel centro di massa della Terra e solidale ad essa (Earth Centered Earth Fixed ECEF) con l'asse Z coincidente con l'asse polare (asse di rotazione medio della Terra) e orientato verso il punto medio del polo nord, l'asse X (giacente sul piano equatoriale) orientato verso il punto d'intersezione del piano XZ del meridiano fondamentale (Greenwich) con il piano equatoriale medio XY e l'asse Y (giacente sul piano equatoriale) orientato in modo da completare una terna destrorsa a cui viene associato un ellissoide di rotazione oblatto biassiale geocentrico ed equipotenziale (ellissoide di riferimento) avente l'asse Z come asse di simmetria e medesimo geocentro. Il datum geodetico globale viene utilizzato tridimensionalmente mediante coordinate cartesiane geocentriche (X, Y, Z) o coordinate geografiche ellissoidiche associate alla quota ellissoidica (φ, λ, h).



Terna, coordinate ed ellissoide geocentrici [da Racidioni & Stoppini].

Nei sistemi globali convenzionali, come il World Geodetical System WGS, la determinazione della posizione dei punti sulla Terra (posizionamento) avviene mediante l'utilizzo di sistemi satellitari denominati Global Navigation Satellite System GNSS fra i quali abbiamo il NAVigation Satellite Timing And Ranging Global Positioning System NAVSTAR GPS (statunitense, 1978), il GLOBAL NAVigation Satellite System (GLOBalnaya NAVigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) GLONASS (russo, 1982) e il GALILEO (europeo, 2011).

Il sistema di riferimento geodetico globale WGS, definito dall'allora Defense Mapping Agency DMA statunitense, è basato su considerazioni geometrico-dinamiche relative al globo terrestre e in particolare sull'assunzione della teoria dell'ellissoide geocentrico equipotenziale esposta, per la prima volta, da Paolo Pizzetti (Parma, 1860 – Pisa, 1918) nel 1894 ed ulteriormente elaborata da Carlo Somigliana (Como, 1860 – Casanova Lanza CO, 1955) nel 1929. L'ellissoide viene completamente definito dalle seguenti quattro fondamentali costanti convenzionali, denominate *elementi di Stokes* dal nome del geodeta George Gabriel Stokes (Skreen, Sligo, 1819 - Cambridge, Cleveland 1903) e dalle quali possono essere derivati tutti i restanti parametri, sia fisici sia geometrici, del globo terrestre:

	denominazione	valore	note
a	raggio equatoriale	$6\,378\,137 \pm 2\text{ m}$	
GM	costante gravitazionale geocentrica	$(3\,986\,005 \pm 0.6) \cdot 10^8\text{ m}^3/\text{s}^2$	M è la massa della Terra inclusa l'atmosfera e G la costante newtoniana di attrazione universale
C₂₀	coefficiente gravitazionale zonale di secondo grado normalizzato o coefficiente della prima armonica zonale	$(-484.16685 \pm 0.00130) \cdot 10^{-6}$	non tiene conto degli effetti dell'attrazione lunisolare
ω_T	velocità angolare terrestre	$(7\,292\,155 \pm 0.1500) \cdot 10^{-11}\text{ rad/s}$	

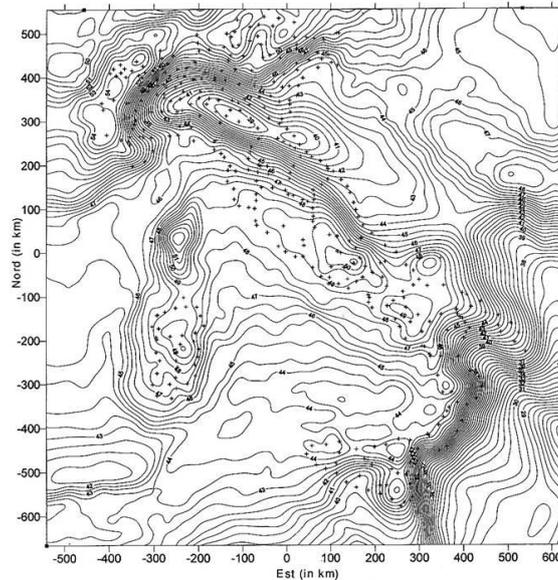
Il coefficiente C_{20} , strettamente legato a quello dello schiacciamento da un teorema del francese Alexis Claude Clairaut (Parigi, 1713-1765) esposto nell'opera *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique* (1743), si può ricavare dal corrispondente parametro J_2 , denominato fattore di forma dinamico di valore $(1082.63 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}$, utilizzato per l'ellissoide di riferimento associato al Geodetic Reference System 1980 GRS80 tramite la relazione $-J_2/5$.

tab. 1 – Elementi di Stokes

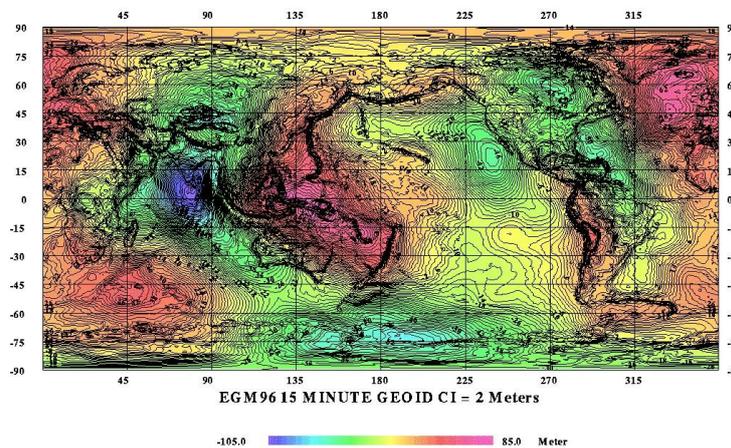
Al sistema globale WGS, che è un sistema terrestre convenzionale (*Conventional Terrestrial System CTS*), è associato un modello di Terra rotante, con velocità angolare media costante, intorno ad un asse passante per il polo medio convenzionale (*Conventional Terrestrial Pole CTP*) (modello Terra standard). In realtà, la Terra, si discosta dal modello standard principalmente per i moti che animano il suo asse di rotazione (nutazione e precessione) e la posizione del polo (polodia). Quest'ultimi, cambiando continuamente di posizione rendono inevitabile che tutte le misure possibili sulla superficie terrestre, siano automaticamente riferite ad una Terra istantanea (modello Terra istantanea). Pertanto, il WGS deve essere analiticamente riferibile a un sistema terrestre istantaneo (*Istantaneous Terrestrial System ITS*) al fine di poter tener conto degli scostamenti del modello standard dalla realtà fisica della Terra, e ad un sistema inerziale convenzionale (*Conventional Inertial System CIS*), definito dal sistema FK5 (Fundamental

Katalog 5 pubblicato dall'Astronomisches Recheninstitut di Heidelberg in Germania) per poter tener conto dei moti perturbativi terrestri.

Lo scostamento altimetrico (espresso in metri e di valore positivo o negativo) tra la quota geoidica od ortometrica H (sul geoido, che è una superficie di tipo fisico ricavata con misure gravimetriche) e la quota ellissoidica h (sull'ellissoide, che è una superficie di tipo geometrico) viene denominato ondulazione geoidica N , da cui la seguente equazione $h = H + N$ che fornisce la quota sul livello del mare del punto. Per tale determinazione il datum globale WGS84 utilizza lo standard *Earth Geopotential Model* 1996 EGM96 che approssima il geoido nel suo complesso.



Modello italiano del geoido ITALGEO95 (equidistanza di 0.5 metri). Le ondulazioni geoidiche rispetto all'ellissoide WGS84 sono tutte comprese tra i +37 e i +54 metri.



Il modello globale del geoido EGM96 è stato sviluppato da una collaborazione tra la National Imagery and Mapping Agency NIMA, il Goddard Space Flight Center della NASA e l'Ohio State University. Le ondulazioni geoidiche variano da + 75 metri a - 105 metri rispetto all'ellissoide WGS84.

datum	tipo	ellissoide	orientamento (punto di emanazione)	meridiano fondamentale	rete associata (realizzazioni o <i>frame</i>)
Roma 40	locale	IRE 1924 (Hayford)*	Roma - Monte Mario 41° 55' 25.51" N 12° 27' 08.40" E di Gw azimut Monte Soratte 6° 35' 00.88"	Monte Mario	rete geodetica IGM (triangolazione terrestre, 1888-1995)
ED 50	locale	IRE 1924 (Hayford)	Potsdam - Helmertturm (medio europeo) 52° 22' 51.446" N 13° 03' 58.741" E di Gw	Greenwich**	sottoinsieme delle reti geodetiche nazionali europee (triangolazione terrestre, 1950)
WGS 84	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	satellitare (GPS – USA, 1984) rete EPN (GNSS – Europa, 1989) rete IGM95 (GPS – Italia, 1995))
ITRS	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	realizzazioni ITRFxx*** dal 1992 (vari ricevitori: GNSS, VLBI, LLR, SLR e DORIS) realizzazioni IGSSxx dal 1992 (solo ricevitori GNSS) rete geodetica dinamica
ETRS	globale	WGS 84	geocentrico	Greenwich	realizzazioni ETRFxx dal 1989 (ricevitori GNSS della rete EPN) rete geodetica dinamica

Acronimi nella tabella: DORIS Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite, ED European Datum, EPN EUREF (European Reference Organisation for Quality Assured Breast Screening and Diagnostic Services che la realizza e mantiene) Permanent Network, ETRFxx European Terrestrial Reference Frame (xx indica l'epoca di realizzazione), ETRS European Terrestrial Reference System, IGM Istituto Geografico Militare, IGS International GNSS Service (sottoinsieme della rete ITRF), IRE International Reference Ellipsoid, ITRFxx International Terrestrial Reference Frame (xx indica l'epoca di realizzazione), ITRS International Terrestrial Reference System (realizzato e mantenuto dall'International Earth Rotation Service IERS un'istituzione creata nel 1988), LLR Lunar Laser Ranging, SLR Satellite Laser Ranging, VLBI Very Long Baseline Interferometry, WGS World Geodetical System

* Nell'Assemblea Generale dell'allora International Union for Geodesy IUG, tenutasi a Madrid (Spagna) nel 1924, venne adottato quale IRE l'ellissoide calcolato dal geodeta statunitense John Fillmore Hayford (Rouse Point, New York 1868 – Evanston, Illinois 1925) che dedusse dagli studi e ricerche sull'isostasia ed espose nell'opera *The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States* (1909).

** Nella Conferenza Internazionale di Cartografia tenutasi a Washington D.C. (USA) nel 1884 venne scelto, quale meridiano di riferimento internazionale origine delle longitudini, quello passante per l'osservatorio di Greenwich a Londra ($\varphi = 51^\circ 28' 38.2''$ N e $\lambda = 0^\circ$).

*** Il sistema di riferimento geodetico ITRF viene utilizzato per usi prettamente scientifici (geodetici e geofisici) in cui è richiesta un'accuratezza millimetrica nelle coordinate dei punti.

tab. 2 - Caratteristiche di alcuni datum geodetici

datum	coordinate cartografiche	rappresentazione	zone per l'Italia
Roma 40	Gauss-Boaga*	Gauss cilindro secante	Fuso 1 (Ovest), Fuso 2 (Est)**
ED 50	UTM-ED50***	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)
WGS 84	UTM-WGS84	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)
ETRS 89	UTM-ETRS89	Gauss cilindro secante	Fuso 32, Fuso 33, Fuso 34 (Nord)

* Proiezione analitica conforme ideata da Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 – Gottinga, 1855) nel 1821 a cui si associa, dal 1948, il nome del geodeta Giovanni Boaga (Trieste, 1902 – Tripoli, 1961) che ne elaborò le formule originarie per adattare alle necessità dell'area italiana.

** L'ampiezza di ciascun fuso è di 6° con longitudine del meridiano centrale da Roma Monte Mario di -3° 27' 08.400" per il Fuso Ovest e di +2° 32' 51.600" per il Fuso Est.

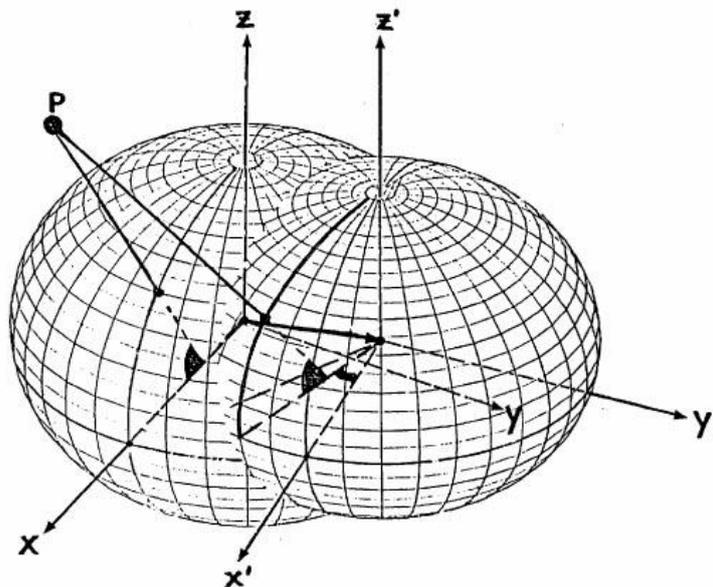
*** L'Universal Transverse Mercator UTM, viene così chiamata negli USA in onore del cartografo olandese Gerhard Kremer (Mercatore) (Rupelmonde, Fiandra 1512 – Duisburg, 1594) per il suo fondamentale studio delle proiezioni cilindriche (1569).

tab. 3 - Sistemi cartografici associati ai vari datum

Quando si forniscono le coordinate di un punto bisogna sempre specificare il *datum* a cui sono riferite in quanto il medesimo punto riferito a sistemi di riferimento geodetico diversi ha coordinate completamente diverse. Mentre, nel medesimo *datum*, un punto ha coordinate che possono essere espresse in vari tipi.

datum	latitudine ϕ	longitudine λ	coordinata X	coordinata Y	coordinata Z
Roma 40	41° 55' 25.510" N	12° 27' 08.400" E di Gw	4641070.779 m	1024850.506 m	4239379.331 m
ED 50	41° 55' 31.487" N	12° 27' 10.933" E di Gw	4640937.874 m	1024880.929 m	4239516.541 m
WGS 84	41° 55' 27.851" N	12° 27' 07.658" E di Gw	4640815.315 m	1024776.585 m	4239360.133 m

tab. 4 – Coordinate geografiche e geocentriche del vertice Monte Mario nei vari datum

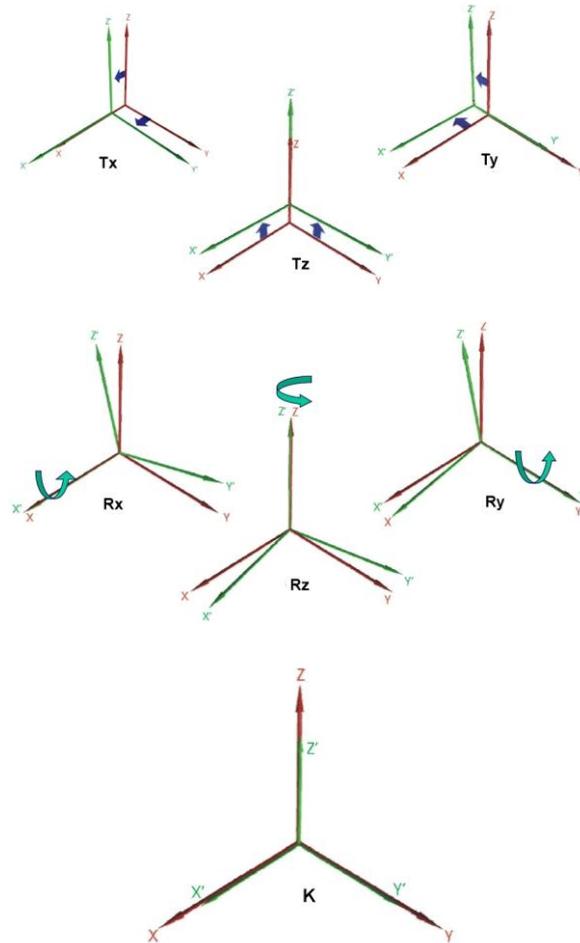


Posizionamento di un medesimo punto in due datum geodetici diversi [da Gerhard Beutler].

La trasformazione di *datum*, in pratica sempre approssimata, viene eseguita operando sulle coordinate cartesiane ellissocentriche X,Y, Z nei due sistemi tenendo conto dei tre parametri di traslazione T_x , T_y e T_z lungo gli assi, dei tre parametri di rotazione R_x , R_y e R_z attorno agli assi e del parametro fattore di scala K . Il procedimento viene denominato *trasformazione a sette parametri* o *trasformazione di Helmert* (*similarity transformation*) dal nome del geodeta tedesco Friedrich Robert Helmert (Freiberg, Sassonia 1843 – Potsdam, 1917) considerato tra i fondatori della moderna geodesia e autore del famoso trattato *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, mit Untersuchungen ueber die mathematische*

Erdgestalt auf Grund der Beobachtungen (2 voll. 1880-1884). La trasformazione a sette parametri, che è una rototraslazione con variazione di scala, viene detta anche conforme in quanto mantiene invariati gli angoli e conseguentemente la forma delle figure costituenti il rilievo originario.

I sette parametri vengono stimati con un procedimento a minimi quadrati (metodo delle osservazioni indirette, Gauss-Markov) conoscendo le coordinate, in entrambi i *datum*, di un certo numero (non inferiore a tre) di punti denominati punti doppi, scelti con una distribuzione uniforme nell'area sulla quale deve essere effettuata la trasformazione.



Visualizzazione dei sette parametri di traslazione T_x , T_y e T_z , del fattore di scala K e di rotazione R_x , R_y e R_z necessari per la trasformazione tra due datum.

La relazione fra i due sistemi, in forma matriciale, si presenta nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1+K) \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_y & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

che sviluppata fornisce

$$\begin{aligned} X_2 &= T_x + X_1 + Y_1 R_z - Z_1 R_y + X_1 K + Y_1 R_z K - Z_1 R_y K \\ Y_2 &= T_y - X_1 R_z + Y_1 + Z_1 R_x - X_1 R_z K + Y_1 K - Z_1 R_x K \\ Z_2 &= T_z + X_1 R_y - Y_1 R_x + Z_1 + X_1 R_y K - Y_1 R_x K - Z_1 K \end{aligned}$$

nella quale X Y Z sono le coordinate cartesiane geocentriche del punto nei due sistemi individuati dal numero in pedice espresse in metri come i valori delle traslazioni T_i , mentre, i valori delle rotazioni R_i sono espressi in secondi d'arco (in radianti nelle formule). Il fattore di scala K viene espresso in ppm (parti per milione: 1 ppm corrisponde a una variazione di 1 millimetro al chilometro).

Una variante della trasformazione di Helmert sono le formule di Molodensky che si basano sempre su di una rototraslazione a sette parametri, in forma linearizzata e operando sulle coordinate geografiche, qui di seguito riportate:

$$D\varphi = \frac{\sin \lambda}{(N+h)\cos\varphi} T_x - \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} T_y - \frac{(1-f)^2 N+h}{N+h} \operatorname{tg}\varphi(\cos\lambda R_x + \sin\lambda R_y) + R_z$$

$$D\lambda = \frac{\sin\varphi \cos\lambda}{\rho+h} T_x + \frac{\sin\varphi \sin\lambda}{\rho+h} T_y - \frac{\cos\varphi}{\rho+h} + \frac{f^2}{N+h} (\sin\lambda R_x - \cos\lambda R_y) +$$

$$+ \frac{[1-(1-f)^2]N}{\rho+h} \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho+h} \{ [1-(1-f)^2]N \frac{Da}{a} + [\rho + (1-f)^2 N] \frac{Df}{1-f} \}$$

$$Dh = \cos\varphi \cos\lambda T_x - \cos\varphi \sin\lambda T_y - \sin\varphi T_z +$$

$$+ [1-(1-f)^2]N \sin\varphi \cos\varphi (\sin\lambda R_x - \cos\lambda R_y) +$$

$$- \frac{a^2}{N+h} K - \frac{a}{N} - Da + (1-f)^2 N \sin^2 \varphi \frac{Df}{1-f}$$

Il geodeta russo Mikhail Sergeevich Molodensky (Epiphany, 1909 – Mosca, 1991) si laureò a Mosca nel 1931, chiamato da Feodosij Nikolaevic Krasovskiy (Galici, 1878 – Mosca, 1948) padre della rete astrogeodetica sovietica, fece parte dal 1933 al 1960 dello staff del Central Research Institute of Geodesy, Aerophotogrammetry and Cartography (TsNIIIGAiK) e, dal 1946, fu direttore della sezione gravimetria dell'Istituto di Fisica Terrestre dell'Accademia delle Scienze a Mosca. Premio Stalin nel 1946 (per la dissertazione di dottorato *Basic problems of geodetic gravimetry*) e nel 1951 (per la realizzazione del primo gravimetro sovietico) e premio Lenin nel 1963 (per gli studi e ricerche sintetizzate nell'opera *Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth*). Elaborò le seguenti formule, note come *trasformazione standard di Molodensky*, per la trasformazione tra i vari datum geodetici la cui validità esclude le calotte polari a partire da una latitudine uguale o maggiore a 89° e i valori $D\varphi''$, $D\lambda''$ (espressi in secondi d'arco) e Dh (espresso in metri) si sommano algebricamente a quelli iniziali φ , λ e h del punto in esame:

$$D\varphi'' = \frac{-T_x \sin\varphi \cos\lambda - T_y \sin\varphi \sin\lambda + T_z \cos\varphi + Da \frac{Ne^2 \sin\varphi \cos\varphi}{a} + Df (\rho \frac{a}{b} + N \frac{b}{a}) \sin\varphi \cos\varphi}{(\rho+h) \sin 1''}$$

$$D\lambda'' = \frac{-T_x \sin\lambda + T_y \cos\lambda}{(N+h) \cos\varphi \sin 1''}$$

$$Dh = T_x \cos\varphi \cos\lambda + T_y \cos\varphi \sin\lambda + T_z \sin\varphi - Da \frac{a}{N} + Df \frac{b}{a} N \sin^2 \varphi$$

dove

φ = latitudine
 λ = longitudine
 h = altezza ellissoidica
 $D\varphi, D\lambda$ e Dh = correzioni
 Da = differenza semiasse maggiore fra ellipsoidi
 Df = differenza schiacciamento fra ellipsoidi
 a = semiasse maggiore dell'ellissoide
 b = semiasse minore dell'ellissoide = $a(1-e^2)^{0.5}$
 e^2 = eccentricità prima dell'ellissoide = $(a^2-b^2)/a^2 = 1-(1-f)^2 = 2f-f^2$
 N = raggio di curvatura in primo verticale = $a/(1-e^2\sin^2\varphi)^{0.5}$
 ρ = raggio di curvatura nel meridiano = $a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{1.5}$
 f = schiacciamento geometrico = $(a-b)/a$
 $\sin 1'' = 206264.81''$

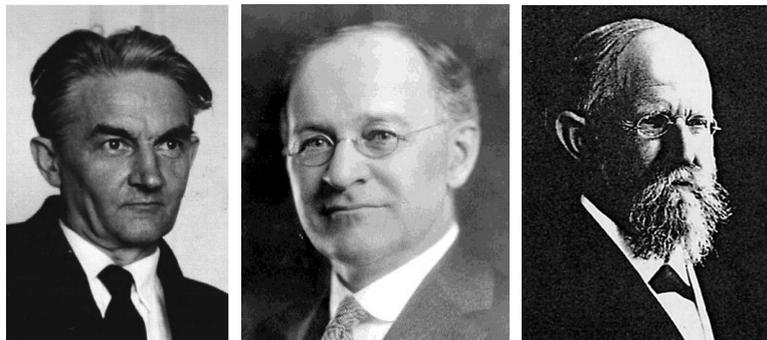
Per le formule di conversione, da coordinate geografiche ellissoidiche (φ, λ, h) a coordinate cartesiane geocentriche (X, Y, Z), si utilizzano: $X=(N+h)\cos\varphi \cdot \cos\lambda$ $Y=(N+h)\cos\varphi \cdot \sin\lambda$ $Z=[N(1-e^2)+h]\sin\varphi$

ellissoide	a	1/f	Da	
			WGSS4-ellissoide	Df 10 ⁴ WGSS4-ellissoide
Airy (1830)	6 377 563.396 m	299.3249646	573.604 m	0.11960023
Bessel (1841)	6 377 397.155	299.1528128	739.845	0.10037483
Clarke (1880)	6 378 249.145	293.465	-112.145	-0.54750714
Helmert (1906)	6 378 200	298.3	-63	0.00480795
Hayford (1909)	6 378 388	297	-251	-0.14192702
Krasovsky (1940)	6 378 245	298.3	-108	0.00480795
WGS (1972)	6 378 135	298.26	2	0.00031211
GRS (1967)*	6 378 160	298.247167427	-23	-0.00113048
GRS (1980)**	6 378 137	298.257222101	=	-0.00000016
WGS (1984)	6 378 137	298.257223563	=	=

* Il Geodetic Reference System 1967 GRS67 venne adottato in occasione della XIV Assemblea Generale dell'International Union of Geodesy and Geophysics IUGG tenutasi a Zurigo-Lucerna (Svizzera) nel 1967.

** Il GRS80 venne adottato in occasione della XVII Assemblea Generale dell'IUGG tenutasi a Canberra (Australia) nel 1979.

tab. 5 - Parametri geometrici di alcuni ellipsoidi di riferimento



Da sinistra i geodeti Mikhail Sergeevich Molodensky (1909-1991), John Fillmore Hayford (1868-1925) e Friedrich Robert Helmert (1843-1917).

Infine, si riportano le formule tratte da (Pierozzi, 1989) adottate dall'IGM per il calcolo dei parametri associati a ciascun vertice della rete IGM95 che consentono di determinare le correzioni da apportare alle rispettive coordinate del punto nel sistema globale (WGS84) per passare al sistema locale (Roma 40):

$$D\varphi = \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{\rho+h} T_x + \frac{\sin \varphi \sin \lambda}{\rho+h} T_y - \frac{\cos \varphi}{\rho+h} T_z +$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{N+h}}{\rho+h} \sin \lambda R_x + \frac{\frac{a^2}{N+h}}{\rho+h} \cos \lambda R_y + \frac{e^2 N}{\rho+h} \cos \varphi \sin \varphi (K + \frac{Da}{a}) +$$

$$+ \frac{\rho+(1-e^2)N}{\rho+h} \cos \varphi \sin \varphi \frac{De^2}{2(1-e^2)}$$

$$D\lambda = \frac{\sin \lambda}{(N+h)\cos \varphi} T_x - \frac{\cos \lambda}{(N+h)\cos \varphi} T_y - \frac{(1-e^2)N+h}{N+h} \operatorname{tg} \varphi \cos \lambda R_x + \frac{(1-e^2)N+h}{N+h} \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda R_y + R_z$$

$$Dh = -\cos \varphi \cos \lambda R_x - \cos \varphi \sin \lambda R_y - \sin \varphi R_z + e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda R_x -$$

$$- e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda R_y - (\frac{a^2}{N+h})K - \frac{a}{N} Da + (1-e^2)N \sin^2 \varphi \frac{De^2}{2(1-e^2)}$$

dove

φ λ h coordinate del punto nel sistema globale

a e^2 parametri dell'ellissoide globale

ρ N raggi di curvatura dell'ellissoide calcolati nel punto

Da De^2 differenze fra i parametri dei due ellissoidi (locale-globale)

da cui

$$\varphi_{\text{locale}} = \varphi_{\text{globale}} + D\varphi'' \quad \lambda_{\text{locale}} = \lambda_{\text{globale}} + D\lambda'' \quad h_{\text{locale}} = h_{\text{globale}} + Dh$$

D-4

World Geodetic System – 1984 (WGS-84) Manual

Table D-1. Datum transformation parameters

Reference datum	Translations (m)			Rotations (")			Scale μ (ppm)	Comments
	ΔX	ΔY	ΔZ	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z		
WGS-84	0.0	0.0	4.5	0.0	0.0	-0.554	0.22	
WGS-72	-87.0	-98.0	-121.0	
ED 50	-96.0	-98.0	-119.0	
ED 79	-82.5	-91.7	-117.7	0.1338	-0.0625	-0.047	0.045	
Austria NS	595.6	87.3	473.3	4.7994	0.0671	5.7850	2.555	Via ED 87
Belgium 50	-55.0	49.0	-158.0	
Berne 1873	649.0	9.0	376.0	
CH-1903	660.1	13.1	369.2	0.8048	0.5777	0.9522	5.660	
Danish GI 1934	662.0	18.0	734.0	
Nouvelle Triangulation de France	-168.0	-60.0	320.0	Greenwich Zero Meridian
Nouvelle Triangulation de France	-168.0	-60.0	320.0	.	.	8414.03	.	Paris Zero Meridian
Potsdam	587.0	16.0	393.0	Via ED 50
GGRS 87	199.6	-75.1	-246.3	0.0202	0.0034	0.0135	-0.015	
55	-73.0	46.0	-86.0	
Ireland 65	506.0	-122.0	611.0	
Italy 1940	-133.0	-50.0	97.0	.	.	44828.40	.	Via ED 50 Rome Zero Meridian
Nouvelle Triangulation de Luxembourg	-262.0	75.0	25.0	Via ED 50
Netherlands 1921	719.0	47.0	640.0	Via ED 50
OSGB 36	375.0	-111.0	431.0	
Portugal DLX	504.1	-220.9	563.0	.	.	-0.554	0.220	Via WGS-72
Portugal 1973	-227.0	97.5	35.4	.	.	-0.554	0.220	Via WGS-72
RNB 72	-104.0	80.0	-75.0	Via ED 50
RT 90	424.3	-80.5	613.1	4.3965	-1.9866	5.1846	0.0	
NAD 27	-8.0	160.0	176.0	Mean solution
NAD 83	0.0	0.0	0.0	

Note 1.— 1" in the rotation angle is approximately equal to 31 m on the earth's surface.

$$1'' = 6\,400\,000\text{ m} \times 3.141593 / (180 \times 3600'') = 31.03\text{ m}$$

$$[1\text{ NM} = 1\,852\text{ m (so } 1'' = 30.48\text{ m)}]$$

Note 2.— 1 ppm = 10⁻⁶, i.e. 1 ppm is equivalent to approximately 6.4 m on the earth's surface.

Parametri di trasformazione datum [da DOC 9674/AN 946 - WGS84 Manual - ICAO 2a ed. 2002]

Bibliografia

Mazzucato, M.T., *Globo terrestre*, BIROMA Galliera V.ta, Padova 1996

Mazzucato, M.T., *La Figura della Terra*, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna RN 2008

Mazzucato, M.T., *Coordinate geografiche e cartesiane. Un metodo di trasformazione*, Matematicamente.it Magazine, n. 21/2014, pp. 28-30

Moritz, H. & Yurkina, M. I. (a cura), *M. S. Molodensky in Memoriam*, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen, Universität Graz, Folge 88, Graz, 2000

Radicioni, F. & Stoppini, A., *Datum e coordinate nella geodesia*, Università di Perugia 2009

Pierozzi, M., *Alcune considerazioni sulla trasformazione dal sistema WGS84 ad un sistema geodetico locale*, Boll. di Geodesia e Scienze Affini n. 1/1989 pp. 45-55

Sitografia

International Earth Rotation and Reference Systems Service IERS www.iers.org

Istituto Geografico Militare www.igmi.org

Rete Mareografica Nazionale dell'ISPRA www.mareografico.it

WGS84 Manual - NIMA Technical Report TR8350.2 <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>

EGM96 et al. www.ngs.noaa.gov/GEOID/

Elenco parametri di Helmert da *locale* a *WGS84* http://earth-info.nga.mil/GandG/coordsys/datums/NATO_DT.pdf

Software CARTLAB1 www.anisn.it/geologia2000/Prg/CARTLAB1.zip