184. Il problema ristretto dei tre corpi

Marco Giancola
giancolamarco@libero.it

Descrizione del problema

Il problema ristretto dei tre corpi consiste nella descrizione del moto di un corpo di massa m_3 sottoposto all'azione gravitazionale di due corpi, detti primari, di masse m_1 ed m_2, i quali ruotano con velocità angolare costante ω intorno al loro centro di massa su orbite piane circolari poste sul piano nel quale si svolge il moto di m_3. Si suppone che le masse dei due primari abbiano distribuzione tale da poterli considerare puntiformi; si introduce inoltre l'ipotesi fondamentale per la quale la massa del terzo corpo, essendo molto inferiore a quella dei primari, non influenzi il moto di questi ultimi, il quale pertanto è descritto dal problema dei due corpi di cui è nota la soluzione.

La descrizione e lo studio del problema vengono effettuati in due distinti sistemi di riferimento. Il primo è un sistema di riferimento cartesiano inerziale di assi X e Y individuante il piano nel quale si svolge il moto dei tre corpi, la cui origine coincide col baricentro dei primari. Tale sistema di riferimento prende il nome di sistema di riferimento siderale. Il secondo è un sistema di riferimento cartesiano di assi x e y che individua lo stesso piano del sistema di riferimento siderale, ha la stessa origine, ma ruota con velocità angolare ω rispetto ad esso. Pertanto in tale sistema di riferimento, che viene chiamato sistema di riferimento sinodico, i due primari sono fissi e, per ipotesi, sono posti sull'asse delle ascisse orientato da m_1 a m_2.

Equazioni del moto

La legge di gravitazione universale stabilisce che due corpi puntiformi dotati di masse M_1 ed M_2, ad una distanza d l'uno dall'altro, si attraggono con una forza che è diretta secondo la loro congiungente e vale in modulo:

$$F = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

essendo G la costante di gravitazione universale, pari a $6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3/kg \cdot s^2$.

Dalla legge di gravitazione universale e dalla seconda legge della dinamica, seguono le equazioni scalari del moto di m_3 nel sistema di riferimento siderale:

$$\begin{cases} \ddot{X} = G\dfrac{m_1}{\rho_1^{\,3}}(X_1 - X) + G\dfrac{m_2}{\rho_2^{\,3}}(X_2 - X) \\ \ddot{Y} = G\dfrac{m_1}{\rho_1^{\,3}}(Y_1 - Y) + G\dfrac{m_2}{\rho_2^{\,3}}(Y_2 - Y) \end{cases}$$

dove X e Y sono le coordinate di m_3, mentre X_i e Y_i sono le coordinate di m_i, con i = 1, 2. ρ_1 e ρ_2 sono le distanze di m_3 rispettivamente da m_1 e m_2, ovvero:

$$\rho_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}$$
$$\rho_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

La relazione tra il sistema sinodico e quello siderale è data da:

$$\begin{cases} X = x\cos\omega t - ysen\omega t \\ Y = xsen\omega t + y\cos\omega t \end{cases}$$

Grazie a queste ultime formule, le equazioni del moto di m_3 diventano:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = G\dfrac{m_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + G\dfrac{m_2}{\rho_2^3}(x_2 - x) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = G\dfrac{m_1}{\rho_1^3}(y_1 - y) + G\dfrac{m_2}{\rho_2^3}(y_2 - y) \end{cases} \quad (1)$$

dove x $(x_{1,2})$ e y $(y_{1,2})$ sono le coordinate di m_3 $(m_{1,2})$ nel sistema sinodico. Essendo, ovviamente, $y_1 = y_2 = 0$, le (1) diventano:

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = G\dfrac{m_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + G\dfrac{m_2}{\rho_2^3}(x_2 - x) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -G\dfrac{m_1}{\rho_1^3}y - G\dfrac{m_2}{\rho_2^3}y \end{cases}$$

Le (2) rappresentano le equazioni del moto di un corpo soggetto ad un campo di forze conservative, quindi è utile esprimere il potenziale relativo all'oggetto considerato in modo che esse possano essere scritte nella forma:

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = V_x(x, y) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = V_y(x, y) \end{cases}$$

dove la funzione V(x,y), determinata uguagliando i secondi membri delle (2) a quelli delle (3) e integrando poi rispetto alle variabili x e y, viene espressa dalla:

$$V = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + G\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right)$$

Quindi V non è altro che il potenziale della forza gravitazionale e della forza centrifuga agenti su m_3.
Consideriamo ora le equazioni del moto di m_3 in un sistema di riferimento sinodico adimensionale nel quale esse assumono forma semplificata; poniamo:

$r = x_2 - x_1 =$ distanza tra m_1 e m_2, $\quad \bar{x} = \dfrac{x}{r}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{y}{r}$, $\quad \bar{t} = \omega t$, $\quad \mu_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$,

$\mu_2 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$, $\quad \bar{\rho}_1 = \dfrac{\rho_1}{r}$, $\quad \bar{\rho}_2 = \dfrac{\rho_2}{r}$.

Osserviamo innanzitutto che, siccome il baricentro dei primari coincide con l'origine del sistema sinodico, per definizione di baricentro, si ha:

$$-m_1 x_1 = m_2 x_2$$

Sommando $m_1 x_2$ al primo e al secondo membro dell'equazione precedente, otteniamo:

$$m_1 x_2 - m_1 x_1 = m_1 x_2 + m_2 x_2 \Rightarrow m_1(x_2 - x_1) = (m_1 + m_2)x_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{x_2}{r} = \bar{x}_2$$

Analogamente si dimostra che $\mu_2 = -\bar{x}_1$.
Il membro sinistro della prima delle (3), espresso in coordinate adimensionali, diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\omega\frac{dy}{dt}=\frac{d^2(r\bar{x})}{d(\bar{t}/\omega)^2}-2\omega\frac{d(r\bar{y})}{d(\bar{t}/\omega)}=r\omega^2\left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}-2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)$$

il membro destro diverrà invece:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial(r\bar{x})}=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\bar{x}} \tag{4}$$

Esprimiamo ora V in funzione delle coordinate adimensionali utilizzando la terza legge di Keplero $\left(G(m_1+m_2)=\omega^2r^3\right)$:

$$V=\frac{\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+G\left(\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}\right)=\frac{\omega^2}{2}\left(r^2\bar{x}^2+r^2\bar{y}^2\right)+G\left[\frac{\mu_1(m_1+m_2)}{r\bar{\rho}_1}+\frac{\mu_2(m_1+m_2)}{r\bar{\rho}_2}\right]=$$
$$=\frac{\omega^2r^2}{2}\left(\bar{x}^2+\bar{y}^2\right)+\frac{G(m_1+m_2)}{r}\left(\frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1}+\frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}\right)=\omega^2r^2\left(\frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2}{2}+\frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1}+\frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}\right)$$

Ponendo:

$$U(\bar{x},\bar{y})=\frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2}{2}+\frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1}+\frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

abbiamo che:

$$V(x,y)=\omega^2r^2U(\bar{x},\bar{y})$$

Quest'ultima formula, sostituita nella (4), ci dà:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\bar{x}}=\omega^2r\frac{\partial U}{\partial\bar{x}}$$

che possiamo scrivere anche nella forma:

$$\frac{1}{\omega^2r}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial\bar{x}}$$

e, dal momento che:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\ddot{x}-2\omega\dot{y}=r\omega^2\left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}-2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)$$

possiamo concludere scrivendo:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}-2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}=\frac{\partial U}{\partial\bar{x}}$$

Utilizzando la seconda delle (3) e procedendo in maniera analoga si ricava l'equazione:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2}+2\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=\frac{\partial U}{\partial\bar{y}}$$

Concludendo, le equazioni del moto di m_3 nel sistema di riferimento sinodico in coordinate adimensionali sono:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \dfrac{\partial U}{\partial \bar{x}} \\ \dfrac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \dfrac{\partial U}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

L'integrale di Jacobi

Dimostriamo ora che le equazioni (5) ammettono un integrale primo detto *integrale di Jacobi*. Infatti, moltiplicando la prima equazione per $d\bar{x}/d\bar{t}$, la seconda per $d\bar{y}/d\bar{t}$ e sommando, otteniamo:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{dU}{d\bar{t}}$$

che è equivalente a:

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left[2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2\right] = 0$$

ovvero:

$$2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2 = C \quad (6)$$

Il primo membro della (6) prende il nome di *integrale di Jacobi*, mentre la costante C è detta *costante di Jacobi*. L'integrale di Jacobi è quindi una relazione che lega, nel sistema sinodico adimensionale, le coordinate della posizione di m_3 (ricordiamo che $U = \left[\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)/2\right] + \left(\mu_1/\bar{\rho}_1\right) + \left(\mu_2/\bar{\rho}_2\right)$) al quadrato della sua velocità.

Si può dimostrare facilmente, riutilizzando le precedenti variabili (x, y, t, m_1, m_2, ρ_1, ρ_2), che nel sistema sinodico non adimensionale la (6) assume la forma:

$$2V - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \tilde{C}$$

con $\tilde{C} = C\omega^2 r^2$.

Una opportuna modificazione della funzione $U(\bar{x}, \bar{y})$, tramite l'aggiunta di una costante, non influenza le equazioni del moto ed offre una forma più utile di queste. Poniamo:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\mu_1\mu_2}{2}$$

sviluppando questa espressione, avremo:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2} + \frac{\mu_1\mu_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\mu_1\bar{\rho}_1^{\,2} + \mu_2\bar{\rho}_2^{\,2}\right) + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

Le equazioni del moto di m_3 diventano:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \dfrac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}} \\ \dfrac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \dfrac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} \end{cases}$$

e l'integrale di Jacobi assume la forma:

$$2\bar{U} - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2 = \bar{C}$$

con $\bar{C} = C + \mu_1\mu_2$.
Dato che $\mu_1 + \mu_2 = 1$, ponendo $\mu_2 = \mu$ $(0 < \mu < 1)$, possiamo scrivere $\mu_1 = 1 - \mu$, ottenendo così per $\bar{U}$ l'espressione:

$$\bar{U}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{1-\mu}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu}{\bar{\rho}_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$$

Soluzioni d'equilibrio

L'integrazione delle equazioni differenziali rappresentanti il problema ristretto dei tre corpi, espresse nel sistema di riferimento sinodico in coordinate adimensionali dalle (7), costituisce uno dei problemi più studiati, e non risolti, della fisica matematica.
Tuttavia sono state trovate le soluzioni particolari relative al caso in cui m_3 sia in quiete nel sistema sinodico; tali soluzioni sono pertanto chiamate *soluzioni d'equilibrio*. Va però osservato che l'equilibrio è relativo al sistema sinodico, mentre nel sistema siderale m_3 compie moti circolari, intorno al baricentro dei primari, con velocità angolare costante.
Essendo quindi, in tal caso, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ costanti, avremo:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = 0$$

pertanto le equazioni del moto si riducono a:

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} = 0$$

mentre l'integrale di Jacobi diventa:

$$\bar{U}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{C}/2$$

Per risolvere le nuove equazioni del moto, operiamo un cambiamento di variabili esprimendo $\bar{U}$ in funzione di $\bar{\rho}_1$ e $\bar{\rho}_2$ anziché di x e y. Essendo:

$$\bar{\rho}_1 = \sqrt{(\bar{x}-\bar{x}_1)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x}+\mu_2)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x}+\mu)^2 + \bar{y}^2}$$

$$\bar{\rho}_2 = \sqrt{(\bar{x}-\bar{x}_2)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x}-\mu_1)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x}-1+\mu)^2 + \bar{y}^2}$$

possiamo scrivere:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (1-\mu)\bar{\rho}_1^{\,2} + \mu\bar{\rho}_2^{\,2} - \mu(1-\mu)$$

da cui consegue che:

$$\overline{U}=\frac{1}{2}\left[(1-\mu)\overline{\rho}_1^2+\mu\overline{\rho}_2^2-\mu(1-\mu)\right]+\frac{1-\mu}{\overline{\rho}_1}+\frac{\mu}{\overline{\rho}_2}+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)=(1-\mu)\left(\frac{1}{2}\overline{\rho}_1^2+\frac{1}{\overline{\rho}_1}\right)+\mu\left(\frac{1}{2}\overline{\rho}_2^2+\frac{1}{\overline{\rho}_2}\right)$$

Inserendo quest'ultima espressione nelle seguenti equazioni:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{x}}=\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\rho}_1}\dfrac{\partial\overline{\rho}_1}{\partial\overline{x}}+\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\rho}_2}\dfrac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial\overline{x}}\\[2ex]\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{y}}=\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\rho}_1}\dfrac{\partial\overline{\rho}_1}{\partial\overline{y}}+\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\rho}_2}\dfrac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial\overline{y}}\end{cases}$$

otteniamo infine:

$$(8)\qquad\begin{cases}(1-\mu)\left(\overline{\rho}_1-\dfrac{1}{\overline{\rho}_1^2}\right)\dfrac{\overline{x}+\mu}{\overline{\rho}_1}+\mu\left(\overline{\rho}_2-\dfrac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\dfrac{\overline{x}+\mu-1}{\overline{\rho}_2}=0\\[2ex](1-\mu)\left(\overline{\rho}_1-\dfrac{1}{\overline{\rho}_1^2}\right)\dfrac{\overline{y}}{\overline{\rho}_1}+\mu\left(\overline{\rho}_2-\dfrac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\dfrac{\overline{y}}{\overline{\rho}_2}=0\end{cases}$$

Consideriamo ora due casi distinti:
1) $\overline{y}\neq 0$
Dalla seconda delle (8), otteniamo:

$$(1-\mu)\left(\overline{\rho}_1-\frac{1}{\overline{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_1}+\mu\left(\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_2}=0\Rightarrow(1-\mu)\left(\overline{\rho}_1-\frac{1}{\overline{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_1}=-\mu\left(\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_2}\qquad(9)$$

La prima delle (8), grazie alla (9), diventa:

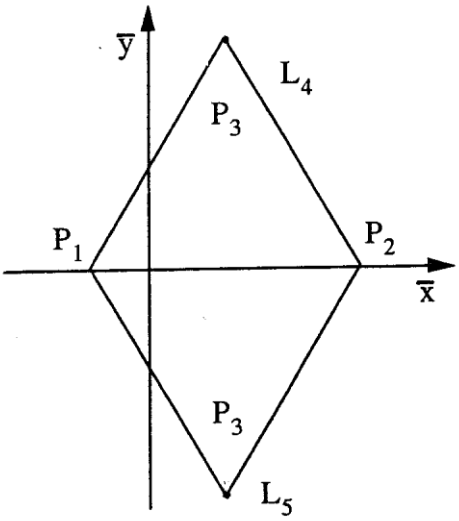
$$-\mu\left(\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_2}(\overline{x}-\mu)+\mu\left(\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_2}(\overline{x}+1-\mu)=0\Rightarrow\mu\left(\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\overline{\rho}_2}\left[\overline{x}+1-\mu-(\overline{x}-\mu)\right]=0$$

$$\Rightarrow\overline{\rho}_2-\frac{1}{\overline{\rho}_2^2}=0\Rightarrow\overline{\rho}_2^3=1\Rightarrow\overline{\rho}_2=1$$

Sostituendo $\overline{\rho}_2=1$ nella (9), otteniamo $\overline{\rho}_1=1$.

Quindi, nel caso $\overline{y}\neq 0$, esistono solo due possibili soluzioni per la posizione di m_3, che corrispondono ai due vertici dei triangoli equilateri aventi come base il segmento che congiunge le posizioni dei due primari. Queste soluzioni, scoperte da Lagrange, vengono chiamate soluzioni d'equilibrio *triangolari* o *equilatere*, ed indicate con L_4 ed L_5. Calcolando le coordinate di tali punti si ottiene:

$$L_4=\left(\frac{1}{2}-\mu,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad L_5=\left(\frac{1}{2}-\mu,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Soluzioni d'equilibrio equilatere

$2)\bar{y}=0$

In tal caso, le eventuali soluzioni del problema corrispondono a punti appartenenti all'asse delle ascisse (pertanto sono chiamate *collineari*) ed esistono tre casi possibili:

- $\bar{x}<-\mu$ (m_3 a sinistra di m_1),
- $-\mu<\bar{x}<1-\mu$ (m_3 compreso tra m_1 ed m_2),
- $\bar{x}>1-\mu$ (m_3 a destra di m_2).

Essendo $\bar{y}=0$, le (8) si riducono ad una sola equazione:

$$(1-\mu)\left(\bar{\rho}_1-\frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{x}+\mu}{\bar{\rho}_1}+\mu\left(\bar{\rho}_2-\frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{x}+\mu-1}{\bar{\rho}_2}=0$$

nella quale ora si ha:

$$\bar{\rho}_1=|\bar{x}-\bar{x}_1|=|\bar{x}+\mu| \qquad \bar{\rho}_2=|\bar{x}-\bar{x}_2|=|\bar{x}+\mu-1|$$

ovvero, distinguendo i tre casi, avremo:

$a)\bar{\rho}_1=-\bar{x}-\mu, \bar{\rho}_2=1-\bar{x}-\mu=1+\bar{\rho}_1,$

$b)\bar{\rho}_1=\bar{x}+\mu, \bar{\rho}_2=1-\bar{x}-\mu=1-\bar{\rho}_1,$

$c)\bar{\rho}_1=\bar{x}+\mu, \bar{\rho}_2=\bar{x}+\mu-1=\bar{\rho}_1-1.$

Utilizzando queste espressioni e ponendo $\bar{\rho}_1=\rho$ nei casi a) e b); $\bar{\rho}_2=\rho$ nel caso c), possiamo riscrivere l'equazione precedente, in corrispondenza con i tre casi, nei seguenti modi:

$$(1-\mu)\left(\rho-\frac{1}{\rho^2}\right)+\mu\left[\rho+1-\frac{1}{(\rho+1)^2}\right]=0$$

$$(1-\mu)\left(\rho-\frac{1}{\rho^2}\right)-\mu\left[1-\rho-\frac{1}{(1-\rho)^2}\right]=0$$

$$(1-\mu)\left[1+\rho-\frac{1}{(1+\rho)^2}\right]+\mu\left(\rho-\frac{1}{\rho^2}\right)=0$$

Caso a)
Ponendo:

$$F(\rho)=\frac{\rho-\frac{1}{\rho^2}}{1+\rho-\frac{1}{(1+\rho)^2}}$$

l'equazione diventa:

$$F(\rho)=\frac{\mu}{\mu-1}$$

F è una funzione definita e continua in (0, +∞); si può verificare che gode delle seguenti proprietà:

$$F'(\rho)>0 \Rightarrow F(\rho) \text{è crescente} \qquad F(1)=0 \qquad \lim_{\rho\to 0^+} F(\rho)=-\infty$$

Quindi F assume il valore $\mu/(\mu-1) < 0$ una sola volta, per un valore di ρ compreso tra 0 e 1. Pertanto il punto corrispondente alla soluzione d'equilibrio, che indichiamo con L_1, ha ordinata uguale a 0 e ascissa compresa tra $-1-\mu$ e $-\mu$ (nel sistema sinodico).

Caso b)
Ponendo:

$$G(\rho)=\frac{1-\rho-\frac{1}{(1-\rho)^2}}{\rho-\frac{1}{\rho^2}}$$

l'equazione diventa:

$$G(\rho)=\frac{1-\mu}{\mu}$$

Supponiamo che sia m_1 il primario di massa maggiore; si avrà:

$$m_1 \geq m_2 > 0 \Rightarrow 0 < \mu \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\mu}{\mu} \geq 1$$

La funzione $G(\rho)$, definita e continua in $(0, 1)\cup(1, +\infty)$, è crescente nell'intervallo [1/2, 1), inoltre $G(1/2) = 1$ e $\lim_{\rho\to 1^-} G(\rho)=+\infty$. Quindi G assume il valore $(1-\mu)/\mu$ una volta sola nell'intervallo [1/2, 1). Indicheremo con $L_3=(\bar{x}_{L_3},\bar{y}_{L_3})$ la posizione corrispondente, dove $\bar{y}_{L_3}=0$ e $0 \leq \frac{1}{2}-\mu \leq \bar{x}_{L_3} < 1-\mu < 1$. Osserviamo che L_3 è più vicino ad m_2 che ad m_1, ovvero è più vicino al primario di massa inferiore.

Caso c)
Tale caso è molto simile a quello a), infatti è rappresentato dall'equazione:

$$F(\rho)=\frac{\mu-1}{\mu}$$

quindi valgono le stesse considerazioni fatte nel caso a). Pertanto possiamo concludere che esiste una terza soluzione d'equilibrio collineare che corrisponde ad un punto, che chiamiamo L_2, giacente sull'asse $\bar{x}$, la cui ascissa è compresa tra 1-μ e 2-μ.
Concludendo, abbiamo visto che il sistema (7) ammette 5 soluzioni d'equilibrio costituite dai punti L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 raggruppati nella soluzione collineare e nella soluzione equilatera. Se m_3 è posizionato in uno di questi 5 punti con velocità ed accelerazione nulle, esso rimarrà indefinitamente in tale posizione. Tali punti sono chiamati *punti lagrangiani* o *punti di librazione*.
Si può dimostrare che L_4 ed L_5 sono punti di equilibrio stabile se $\mu_1\mu_2 \le 1/27$; tale condizione è soddisfatta dal sistema Terra-Luna, essendo il prodotto della massa adimensionalizzata della Terra per quella della Luna pari a circa 1/83. Gli altri tre punti lagrangiani, invece, non sono mai punti di equilibrio stabile.

Le curve di Hill
Consideriamo di nuovo l'integrale di Jacobi:

$$2\bar{U} - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2 = \bar{C}$$

poniamo:
$v = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2}$ = modulo della velocità di m_3 nel sistema sinodico adimensionale
L'integrale di Jacobi diviene:

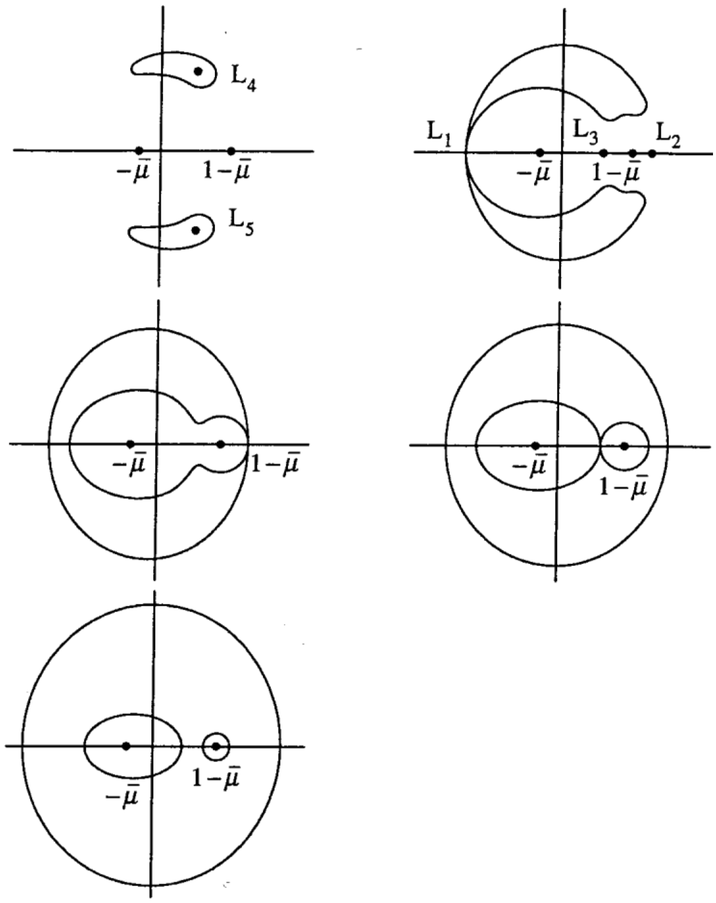
$$2\bar{U} - v^2 = \bar{C}$$

Per v = 0, abbiamo:

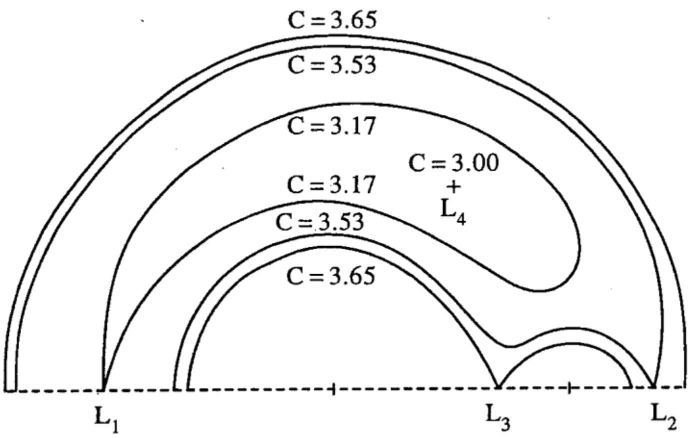
$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{C}/2 \qquad (10)$$

Ad ogni valore di $\bar{C}$ corrisponde una curva nel piano $\bar{x}\bar{y}$ che ha per equazione la (10); tali curve sono chiamate *curve a velocità zero* o *curve di Hill*. Dato che $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ è una funzione potenziale, le curve di Hill sono linee equipotenziali. Vediamo ora quali indicazioni sui moti si possono dedurre dallo studio di queste curve. Incominciamo con l'enunciare alcune proprietà significative della funzione $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ omettendone le relative dimostrazioni.
1) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ ha un minimo assoluto uguale a 3/2 che raggiunge nei punti L_4 ed L_5;
2) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ diverge positivamente all'infinito;
3) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{U}(\bar{x}, -\bar{y})$, quindi le curve di Hill sono simmetriche rispetto all'asse $\bar{x}$;
4) L_1, L_2 ed L_3 sono punti di sella per $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$.
Studiamo ora l'andamento delle curve al variare della costante di Jacobi. Cominciamo da $\bar{U} = 3/2\ (\bar{C} = 3)$. In questo caso la curva consiste soltanto dei punti L_4 ed L_5. Aumentando di poco $\bar{C}$, si hanno due curve chiuse che contengono all'interno i punti L_4 ed L_5. La parte di piano all'interno di queste curve corrisponde a $v^2 = 2\bar{U} - \bar{C} < 0$, la parte esterna alle curve invece corrisponde a $v^2 > 0$. Quindi queste curve separano le zone in cui sono possibili i moti (v reali) da quelle in cui non sono possibili (v immaginarie). Aumentando ulteriormente $\bar{C}$, le due curve andranno a congiungersi in L_1. Dopo un ulteriore aumento che causerà la formazione di un'unica curva chiusa contenente L_4, L_5 ed L_1, vi sarà un congiungimento anche in L_2 ed infine in L_3. In questo modo

abbiamo ottenuto una curva costituita da tre ovali; due interni, congiunti in L_3, che circondano i primari (se i primari sono le stelle che costituiscono un sistema binario, tali ovali prendono il nome di *lobi di Roche*), e uno esterno che racchiude gli altri due. Aumentando ancora $\overline{C}$, sparirà il congiungimento in L_3, restando circondati i primari.



Le curve di Hill



Le curve di Hill

Bibliografia

Boccaletti D., Pucacco G.: *Theory of Orbits*, Vol. 1; Berlino, Springer-Verlag, 1996.
Giannone P., *Elementi di Astronomia*; Bologna, Pitagora Editrice s.r.l., 1996.
Szebehely V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*; New York, Academic Press, 1967.