# 182. La fine delle potenze

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

## Introduzione

Rispondere in pochi secondi senza fare calcoli: quale tra i numeri 5.212; 1.897; 2.401; 6.168 è l'unico quadrato perfetto?

Troppo facile? Proviamo, allora, con quest'altra domanda: ci sono dei quadrati perfetti tra i numeri 6.415; 8.240; 7.519; 2.409; 7.434? Se sì, quali?

Certo, si vive benissimo anche senza saper rispondere alle domande precedenti, ma probabilmente gli appassionati di matematica possono avere interesse ad approfondire quesiti di questo tipo.

È quanto si propone di fare il presente articolo, che tratterà le potenze dei numeri interi, esaminandone in particolare un aspetto: le regole riguardanti la loro "fine", ossia le loro cifre terminali.

E non solo per quanto riguarda i quadrati, come negli esempi sopra riportati, ma anche per tutte le potenze di grado superiore.

## 1. Aritmetica modulare

Prendere in considerazione solo le cifre finali di un numero equivale a operare nell'aritmetica modulare con moduli che sono le successive potenze di 10. Ad esempio, l'ultima cifra di un numero $n$ corrisponde a $n \ mod10$, le ultime due cifre a $n \ mod100$ e così via.

Dunque, nel prosieguo del lavoro - anche per evitare ripetizioni - si utilizzeranno indifferentemente locuzioni come "cifre finali", "cifre terminali" e "terminazioni", oppure le più sintetiche notazioni proprie dell'aritmetica modulare.

Va aggiunto che si approfondirà in particolare l'analisi relativa alle ultime due cifre delle potenze ($n^k \ mod100$), mentre si farà solo qualche breve accenno al caso dell'ultima cifra ($n^k \ mod10$), chiaramente assai meno significativo e interessante da studiare.

## 2. La fine delle potenze: periodicità

Entriamo ora nel vivo dello studio, prendendo in considerazione due elementi che - pur essendo tra loro collegati - conviene per maggiore chiarezza trattare in due capitoli separati.

Il primo riguarda la periodicità con cui si ripetono i numeri che costituiscono le cifre finali delle potenze - cioè i valori di $n^k$ mod100 - a seconda dell'ordine k.

### Quadrati

Cominciamo con il caso più semplice, quello dei quadrati.

Se consideriamo solo l'ultima cifra ($n^2 \ mod10$), vediamo che la successione relativa è 1-4-9-6-5-6-9-4-1-0. Tutto ciò dà una prima indicazione: nessun quadrato perfetto può terminare per 2, 3, 7 o 8.

A questa limitazione ne vanno aggiunte altre, facilmente ricavabili passando ad esaminare le ultime due cifre del numero, cioè $n^2 \ mod100$:

ogni quadrato pari deve essere "doppiamente pari", cioè divisibile per 4, per cui anche le sue ultime 2 cifre devono essere divisibili per 4;

ogni quadrato divisibile per 5 deve esserlo anche per 25, per cui si possono scartare tutti i numeri che terminano per 5 preceduto da cifra diversa da 2 (05, 15, 35 …95);

ogni quadrato divisibile per 10 deve esserlo anche per 100, per cui si devono eliminare tutti i numeri che terminano con un solo 0 (10, 20, 30…90).[1]
La seguente tabella, che riporta i valori di $n^2$ mod100 per i quadrati da 1 a 100, conferma quanto appena detto.

| n | $n^2$mod100 | n | $n^2$mod100 | n | $n^2$mod100 | n | $n^2$mod100 | n | $n^2$mod100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | 21 | 41 | 41 | 81 | 61 | 21 | 81 | 61 |
| 2 | 04 | 22 | 84 | 42 | 64 | 62 | 44 | 82 | 24 |
| 3 | 09 | 23 | 29 | 43 | 49 | 63 | 69 | 83 | 89 |
| 4 | 16 | 24 | 76 | 44 | 36 | 64 | 96 | 84 | 56 |
| 5 | 25 | 25 | 25 | 45 | 25 | 65 | 25 | 85 | 25 |
| 6 | 36 | 26 | 76 | 46 | 16 | 66 | 56 | 86 | 96 |
| 7 | 49 | 27 | 29 | 47 | 09 | 67 | 89 | 87 | 69 |
| 8 | 64 | 28 | 84 | 48 | 04 | 68 | 24 | 88 | 44 |
| 9 | 81 | 29 | 41 | 49 | 01 | 69 | 61 | 89 | 21 |
| 10 | 00 | 30 | 00 | 50 | 00 | 70 | 00 | 90 | 00 |
| 11 | 21 | 31 | 61 | 51 | 01 | 71 | 41 | 91 | 81 |
| 12 | 44 | 32 | 24 | 52 | 04 | 72 | 84 | 92 | 64 |
| 13 | 69 | 33 | 89 | 53 | 09 | 73 | 29 | 93 | 49 |
| 14 | 96 | 34 | 56 | 54 | 16 | 74 | 76 | 94 | 36 |
| 15 | 25 | 35 | 25 | 55 | 25 | 75 | 25 | 95 | 25 |
| 16 | 56 | 36 | 96 | 56 | 36 | 76 | 76 | 96 | 16 |
| 17 | 89 | 37 | 69 | 57 | 49 | 77 | 29 | 97 | 09 |
| 18 | 24 | 38 | 44 | 58 | 64 | 78 | 84 | 98 | 04 |
| 19 | 61 | 39 | 21 | 59 | 81 | 79 | 41 | 99 | 01 |
| 20 | 00 | 40 | 00 | 60 | 00 | 80 | 00 | 100 | 00 |

Con l'ausilio della tabella, vediamo ancora alcune proprietà di $n^2$mod100.
La successione delle cifre finali dei quadrati si ripete sempre uguale ogni 50 numeri. Inoltre, ogni 25 numeri, si "torna indietro" ripercorrendo a ritroso la strada percorsa, per cui $26^2$ mod100 = $24^2$ mod100; $27^2$ mod100 = $23^2$ mod100 … $49^2$ mod100 = $1^2$mod100.
In generale, si può dire che $n^2$mod100 = $(50\text{-}n)^2$ mod100, con n variabile tra 1 e 49.[2]

## Altre potenze di ordine pari

Le altre potenze con esponente pari k=2m (con m intero) seguono regole simili a quanto visto per i quadrati: in generale, resta valido per qualsiasi ordine il fatto che i numeri si ripetono con un "periodo" di 50, suddiviso in due cicli di 25. Ad esempio, $3^6$ = 729; da ciò possiamo dedurre che il numero $97^6$ terminerà anch'esso per 29.
Abbiamo detto "in generale" e non "sempre" poiché - in realtà - vi è un'eccezione, quella relativa a ogni ordine k=10m. Tale caso sarà trattato più avanti, in un paragrafo specifico.

## Cubi

Analogamente a quanto visto in precedenza per i quadrati, riportiamo la tabella relativa a $n^3$ mod100 per i numeri da 1 a 100.

[1] Per maggiore completezza, aggiungiamo un'altra regola, che peraltro non riguarda le cifre finali: ogni quadrato divisibile per 3 deve esserlo anche per 9, per cui vanno scartati tutti i numeri che hanno come somma delle cifre 3 o 6.
[2] Per evitare inutili complicazioni, sia qui che nel prosieguo del testo saranno ignorati i casi-limite (in questo caso n=0 e n=50).

| n | $n^3$mod100 | n | $n^3$mod100 | n | $n^3$mod100 | n | $n^3$mod100 | n | $n^3$mod100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | 21 | 61 | 41 | 21 | 61 | 81 | 81 | 41 |
| 2 | 08 | 22 | 48 | 42 | 88 | 62 | 28 | 82 | 68 |
| 3 | 27 | 23 | 67 | 43 | 07 | 63 | 47 | 83 | 87 |
| 4 | 64 | 24 | 24 | 44 | 84 | 64 | 44 | 84 | 04 |
| 5 | 25 | 25 | 25 | 45 | 25 | 65 | 25 | 85 | 25 |
| 6 | 16 | 26 | 76 | 46 | 36 | 66 | 96 | 86 | 56 |
| 7 | 43 | 27 | 83 | 47 | 23 | 67 | 63 | 87 | 03 |
| 8 | 12 | 28 | 52 | 48 | 92 | 68 | 32 | 88 | 72 |
| 9 | 29 | 29 | 89 | 49 | 49 | 69 | 09 | 89 | 69 |
| 10 | 00 | 30 | 00 | 50 | 00 | 70 | 00 | 90 | 00 |
| 11 | 31 | 31 | 91 | 51 | 51 | 71 | 11 | 91 | 71 |
| 12 | 28 | 32 | 68 | 52 | 08 | 72 | 48 | 92 | 88 |
| 13 | 97 | 33 | 37 | 53 | 77 | 73 | 17 | 93 | 57 |
| 14 | 44 | 34 | 04 | 54 | 64 | 74 | 24 | 94 | 84 |
| 15 | 75 | 35 | 75 | 55 | 75 | 75 | 75 | 95 | 75 |
| 16 | 96 | 36 | 56 | 56 | 16 | 76 | 76 | 96 | 36 |
| 17 | 13 | 37 | 53 | 57 | 93 | 77 | 33 | 97 | 73 |
| 18 | 32 | 38 | 72 | 58 | 12 | 78 | 52 | 98 | 92 |
| 19 | 59 | 39 | 19 | 59 | 79 | 79 | 39 | 99 | 99 |
| 20 | 00 | 40 | 00 | 60 | 00 | 80 | 00 | 100 | 00 |

Come si vede, la successione delle 100 terminazioni non ha un periodo come quello dei quadrati; vi è, però, un'altra forma di regolarità che merita di essere segnalata.
Se prendiamo le coppie di numeri 1-99; 2-98 … 49-51, vediamo che i loro cubi hanno per cifre finali numeri anch'essi complementari a 100; ad esempio $3^3 = 27$ e $97^3 = 912.673$, ossia $97^3 \bmod 100 = 73$.
Utilizzando l'aritmetica modulare, la formula generale si può scrivere come $n^3 \bmod 100 = 100-[(100-n)^3 \bmod 100]$, con n che varia da 1 a 99.
Questa stessa regola - con le eccezioni che vedremo nel prossimo paragrafo - vale per tutte le altre potenze di ordine dispari: ad esempio, $13^7$ vale 62.748.517 (cioè $13^7 \bmod 100 = 17$), per cui la terminazione di $87^7$ sarà 83.

## Quinte potenze

Come si accennava, tra le potenze di ordine dispari ve ne sono alcune che presentano caratteristiche particolari; si tratta di quelle il cui esponente è multiplo di 5. Vediamo la tabella relativa al caso "standard" delle quinte potenze.

| n | $n^5$mod100 | n | $n^5$mod100 | n | $n^5$mod100 | n | $n^5$mod100 | n | $n^5$mod100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | 5 | 25 | 9 | 49 | 13 | 93 | 17 | 57 |
| 2 | 32 | 6 | 76 | 10 | 00 | 14 | 24 | 18 | 68 |
| 3 | 43 | 7 | 07 | 11 | 51 | 15 | 75 | 19 | 99 |
| 4 | 24 | 8 | 68 | 12 | 32 | 16 | 76 | 20 | 00 |

È inutile proseguire oltre nella tabella, poiché è facile verificare che la successione delle cifre finali si ripete esattamente uguale ogni 20 numeri; in altre parole, $21^5 \bmod 100 = 1^5 \bmod 100 = 01$; $22^5 \bmod 100 = 2^5 \bmod 100 = 32$ etc.

Inoltre, vale una formula analoga a quella vista per i cubi, sostituendo la periodicità 100 con la periodicità 20: sono complementari a 100, ad esempio, $2^5$ mod100 e $18^5$ mod100 (che valgono rispettivamente 32 e 68).
La formula sintetica per esprimere questa proprietà, decisamente più complicata rispetto a quelle viste in precedenza, è la seguente: $(n+20q)^5$ mod100 = 100 – {$[(20(q+1)-n)]^5$ mod100}, con n variabile tra 1 a 19 e q variabile tra 0 e 4.
Per assicurarci che tale scrittura sia corretta, proviamo un caso concreto, utilizzando il numero 23. In questo caso n=3 e q=1. Applicando la formula si ottiene $23^5$ mod100 = 100-[$(40-3)^5$ mod100] e con gli opportuni calcoli si può verificare che l'identità è valida, cioè $23^5$ mod100 e $37^5$ mod100 sono effettivamente complementari a 100.[3]
Come nei casi precedenti, anche stavolta è possibile fare una generalizzazione: queste caratteristiche valgono, infatti, per tutte le potenze con esponente k dispari del tipo k=5m.

### La decima potenza

Ma l'analisi non finisce qui; occorre, infatti, considerare separatamente anche la decima potenza: esaminiamola con il supporto di una tabella analoga a quelle viste in precedenza.

| n | $n^{10}$mod100 | n | $n^{10}$mod100 | n | $n^{10}$mod100 | n | $n^{10}$mod100 | n | $n^{10}$mod100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | 5 | 25 | 9 | 01 | 13 | 49 | 17 | 49 |
| 2 | 24 | 6 | 76 | 10 | 00 | 14 | 76 | 18 | 24 |
| 3 | 49 | 7 | 49 | 11 | 01 | 15 | 25 | 19 | 01 |
| 4 | 76 | 8 | 24 | 12 | 24 | 16 | 76 | 20 | 00 |

Il fatto che 10 sia contemporaneamente pari e divisibile per 5 suggerisce l'idea che la decima potenza riassuma in sé le caratteristiche delle due tipologie corrispondenti precedentemente analizzate. In effetti, è proprio così; in particolare, esiste una periodicità 10 e si "torna indietro" ogni 5 numeri, secondo la successione 01-24-49-76-25-76-49-24-01-00.
Ciò conferma che l'esponente pari di una potenza dimezza la periodicità: in generale, si passa da 100 a 50 (come nei casi, già esaminati, di quadrati e cubi), mentre per gli ordini k=5m si passa da 20 a 10.
Inoltre, va aggiunto che le stesse regole della decima potenza valgono anche per tutte quelle di ordine k=10m.
Ma esiste una potenza, di qualsiasi ordine, con una periodicità minore di 10?
Esaminando la successione, ci si rende conto immediatamente che ciò è impossibile; infatti, ogni 10 numeri si deve necessariamente avere per $n^k$ mod100 un valore "00" (le potenze di 10, 20, 30 …) e, altrettanto evidentemente, tale terminazione non può valere per nessun altro numero.

## 3. La fine delle potenze: terminazioni possibili e non

Detto della periodicità, consideriamo adesso un secondo aspetto: i valori che possono assumere le ultime due cifre delle potenze, ossia i valori ammissibili per $n^k$ mod100.
Per maggiore chiarezza, si possono costruire delle tabelle 10x10 e colorare le celle che costituiscono valori accettabili di $n^k$ mod100 a seconda delle diverse potenze. Infine, raggruppando insieme gli ordini per i quali tali valori coincidono, si ottiene la seguente figura riepilogativa di tutte le potenze da 2 a 20.[4]

[3] Infatti $23^5$ vale 6.436.343, mentre $37^5$ = 69.343.957.
[4] Non è necessario andare oltre la ventesima potenza, poiché anche tutte quelle di ordine superiore devono appartenere a una delle sei tipologie descritte nella figura 1.

**FIG. 1 - Potenze fino alla 20° - Valori possibili per $n^k$ mod100**

Esponente 2,6,14,16,18 - 22 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | 03 | **04** | 05 | 06 | 07 | 08 | **09** | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | **16** | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **21** | 22 | 23 | **24** | **25** | 26 | 27 | 28 | **29** | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | **36** | 37 | 38 | 39 | 40 |
| **41** | 42 | 43 | **44** | 45 | 46 | 47 | 48 | **49** | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | **56** | 57 | 58 | 59 | 60 |
| **61** | 62 | 63 | **64** | 65 | 66 | 67 | 68 | **69** | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | **76** | 77 | 78 | 79 | 80 |
| **81** | 82 | 83 | **84** | 85 | 86 | 87 | 88 | **89** | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | **96** | 97 | 98 | 99 | **00** |

Esponente 3,7,9,11,13,17,19 - 63 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | **03** | **04** | 05 | 06 | **07** | **08** | **09** | 10 |
| **11** | **12** | **13** | 14 | 15 | **16** | **17** | 18 | **19** | 20 |
| **21** | 22 | **23** | **24** | **25** | 26 | **27** | **28** | **29** | 30 |
| **31** | **32** | **33** | 34 | 35 | **36** | **37** | 38 | **39** | 40 |
| **41** | 42 | **43** | **44** | 45 | 46 | **47** | **48** | **49** | 50 |
| **51** | **52** | **53** | 54 | 55 | **56** | **57** | 58 | **59** | 60 |
| **61** | 62 | **63** | **64** | 65 | 66 | **67** | **68** | **69** | 70 |
| **71** | **72** | **73** | 74 | **75** | **76** | **77** | 78 | **79** | 80 |
| **81** | 82 | **83** | **84** | 85 | 86 | **87** | **88** | **89** | 90 |
| **91** | **92** | **93** | 94 | 95 | **96** | **97** | 98 | **99** | **00** |

Esponente 4,8,12,16 - 12 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | **16** | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **21** | 22 | 23 | 24 | **25** | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | **36** | 37 | 38 | 39 | 40 |
| **41** | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | **56** | 57 | 58 | 59 | 60 |
| **61** | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | **76** | 77 | 78 | 79 | 80 |
| **81** | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | **96** | 97 | 98 | 99 | **00** |

Esponente 5,15 - 15 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | **07** | 08 | 09 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | **24** | **25** | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | **32** | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | **43** | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | **49** | 50 |
| **51** | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | **57** | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | **68** | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | **75** | **76** | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | **93** | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | **99** | **00** |

Esponente 10 - 6 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | **24** | **25** | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | **49** | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | **76** | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | **00** |

Esponente 20 - 4 valori

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | **25** | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | **76** | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | **00** |

Basta uno sguardo alla figura per notare che il numero di terminazioni ammissibili può variare considerevolmente: si passa dai soli 4 valori accettabili per la ventesima potenza (e per tutte quelle di ordine k=20m) ai 63 valori accettabili per le potenze con esponente dispari e non divisibile per 5.
In generale, le potenze dispari sono - rispetto a quelle pari - assai più "di bocca buona", ossia ammettono molti più numeri come possibili terminazioni.
Ma possiamo essere certi che 4 sia un minimo assoluto? La risposta è "Sì" e per dimostrarlo non c'è nemmeno bisogno di scomodare il modulo 100, basta più semplicemente considerare l'ultima cifra.
Infatti, qualsiasi numero terminante per 0, 1, 5 o 6 - elevato a potenze di qualsiasi ordine - ha sempre la stessa cifra finale del numero originario (ossia, vale la formula $n \bmod 10 = n^k \bmod 10$). Dunque i valori diversi per $n^k \bmod 100$ devono essere almeno 4.

## Quali terminazioni?

Una volta detto <u>quante</u> sono le possibili terminazioni per le diverse tipologie di potenze, vale la pena di spendere qualche parola anche su <u>quali</u> sono.
Con l'ausilio della figura 1 appena vista, si possono ricavare alcune regole. Ad esempio, per essere un quadrato perfetto un numero deve avere le seguenti caratteristiche:

- $n \bmod 10 = 0, 1, 4, 5, 6$ o $9$
- se $n \bmod 10 = 1$, penultima cifra pari
- se $n \bmod 10 = 6$, penultima cifra dispari
- se $n \bmod 10 = 5$, allora $n \bmod 100 = 25$
- se $n \bmod 10 = 0$, allora $n \bmod 100 = 00$

Allo stesso modo, si stabiliscono le condizioni necessarie affinché un numero possa rappresentare un cubo, una quarta potenza e così via.
Approfondiamo ancora il discorso con una figura che mette insieme le diverse tipologie di potenze.

**FIG. 2 - Potenze fino alla 20° - Ricorrenza dei valori di $n^k$ mod100[5]**

| | | |
|---|---|---|
| 00 | 01 | SÌ in tutti i casi |
| 25 | 76 | |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | 16 | SÌ in 15 casi (NO potenze 5-10-15-20) |
| 41 | 36 | |
| 61 | 56 | |
| 81 | 96 | |

| | | |
|---|---|---|
| 24 | | SÌ in 14 casi (NO potenze 4-8-12-16-20) |
| 49 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 04 | 09 | SÌ in 11 casi (NO potenze 4-5-8-10-12-15-16-20) |
| 44 | 29 | |
| 64 | 69 | |
| 84 | 89 | |

| | | |
|---|---|---|
| 51 | 07 | SÌ in 9 casi (tutte le potenze dispari) |
| 32 | 57 | |
| 43 | 68 | |
| 93 | 99 | |
| 75 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 03 | 52 | SÌ in 7 casi (potenze dispari tranne 5-15) |
| 08 | 53 | |
| 11 | 59 | |
| 12 | 63 | |
| 13 | 67 | |
| 17 | 71 | |
| 19 | 72 | |
| 23 | 73 | |
| 27 | 77 | |
| 28 | 79 | |
| 31 | 83 | |
| 33 | 87 | |
| 37 | 88 | |
| 39 | 91 | |
| 47 | 92 | |
| 48 | 97 | |

| | | |
|---|---|---|
| 02 | 98 | NO in tutti i casi |
| 05 | 95 | |
| 06 | 94 | |
| 10 | 90 | |
| 14 | 86 | |
| 15 | 85 | |
| 18 | 82 | |
| 20 | 80 | |
| 22 | 78 | |
| 26 | 74 | |
| 30 | 70 | |
| 34 | 66 | |
| 35 | 65 | |
| 38 | 62 | |
| 40 | 60 | |
| 42 | 58 | |
| 45 | 55 | |
| 46 | 54 | |
| 50 | | |

[5] I numeri sono elencati in ordine diverso da quello crescente per far risaltare meglio le loro caratteristiche. Ad esempio, quelli della tabella in rosso sono in coppie la cui somma è sempre 100.

Come leggere questo schema? Conviene fare qualche esempio, che risulterà più chiaro di qualsiasi spiegazione di tipo descrittivo.
Sui 19 casi possibili (le potenze da 2 a 20) il numero 21 può comparire come terminazione in 15 di essi (quadrati, cubi, quarte potenze, seste potenze …), ma non nelle potenze di ordine 5, 10, 15 e 20.
Invece, il numero 43 può costituire il valore di $n^k$ mod100 per qualunque ordine k dispari (9 casi), mentre 88 "va bene" solo in 7 casi, quelli relativi alle potenze con esponente 3, 7, 9, 11, 13, 17 e 19.

### "Fantastici 4" e "Pecore nere"

Ora esaminiamo più in dettaglio le caratteristiche dei 4 numeri sempre presenti come terminazioni delle potenze di qualsiasi ordine (evidenziati in verde) e dei 37 numeri che non possono mai costituire valori di $n^k$ mod100 qualunque sia k (in rosso). Definiremo tali numeri rispettivamente "Fantastici 4" e "Pecore nere".
L'aspetto più interessante è che entrambe le tipologie sono composte da numeri che vanno a braccetto due a due; in particolare:
tutte le "pecore nere" sono raggruppabili in coppie complementari a 100; il loro numero totale è dispari (37), poiché 50 fa coppia con se stesso.
i "magnifici 4", invece, formano due coppie la cui somma è "01" modulo 100.
Concludiamo il tema proponendo un'altra figura, che consente di evidenziare alcune simmetrie nella disposizione di questi numeri.

**FIG. 3 - Valori sempre presenti o sempre assenti di $n^k$ mod100**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 00 |

Come si vede, le 37 "Pecore nere" sono tutte pari tranne 8, e queste ultime finiscono sempre per 5 (05, 15, 35, 45, 55, 65, 85 e 95).
Inoltre, la figura 3 ci permette di dire immediatamente che - per esempio - i numeri 7.866, 31.314 o 64.255 non sono sicuramente potenze perfette di alcun numero intero, mentre 8.376 e 12.401 potrebbero, in

teoria, essere quadrati, cubi, quarte, quinte … n-esime potenze. In teoria poiché, ovviamente, il fatto di terminare con 01 o 76 è una condizione necessaria, ma tutt'altro che sufficiente affinché un numero sia una potenza perfetta!

## 4. Riepilogo finale

Nei precedenti capitoli si sono esaminate le terminazioni delle potenze da due punti di vista: la periodicità con cui esse si ripresentano e i valori accettabili o meno per i diversi ordini.
Per concludere, riteniamo utile proporre uno specchietto riepilogativo, valido per potenze di ordine k qualsiasi, che riassume in maniera sintetica entrambe le caratteristiche suddette.
Si è scelto un ordinamento che mette in luce come le due caratteristiche esaminate in questo testo siano in relazione tra di loro: minore è la periodicità e minore è anche il numero di valori accettabili per $n^k$ mod100.

| **Esponente k** | **Caso standard** | **Periodo** | **Numero di valori possibili per $n^k$ mod100** |
|---|---|---|---|
| k dispari; k≠5m | k=3 | 100 | 63 |
| k pari; k=4m-2 e ≠10q | k=2 | 50 | 22 |
| k dispari; k=5m | k=5 | 20 | 15 |
| k pari; k=4m e ≠10q | k=4 | 20 | 12 |
| k pari; k=20m-10 | k=10 | 10 | 6 |
| k pari; k=20m | k=20 | 10 | 4 |

Con m, q interi positivi

### Risposte

Per finire, diamo una risposta ai quesiti posti nell'introduzione.

Prima serie (5.212; 1.897; 2.401; 6.168).
Nessun quadrato può terminare per 2, 3, 7 e 8, per cui resta soltanto un "candidato" possibile. Visto che si è detto che uno tra i numeri proposti era un quadrato, deve essere necessariamente 2.401 (che equivale a $49^2$).

Seconda serie (6.415; 8.240; 7.519; 2.409; 7.434).
In questo caso i ragionamenti da fare sono leggermente più elaborati.
I primi due numeri della serie sono esclusi, poiché i quadrati dei numeri terminanti con 5 o 0 devono avere come cifre finali rispettivamente 25 e 00.
Il terzo numero non è accettabile perché se termina per 9 deve avere come penultima cifra un numero pari: 09, 29, 49, 69 e 89 sono le terminazioni possibili.
Il quarto numero rispetta la regola appena vista, ma non va bene perché è divisibile per 3 e non per 9 (la somma delle cifre è 6).
Infine, per l'ultimo numero si applica un criterio simile al precedente: ogni quadrato pari deve essere divisibile per 4, e 7.434 chiaramente non lo è.
Dunque, la risposta alla domanda posta è "No".[6]

[6] Aggiungiamo che - 2.409 a parte - si potevano escludere subito gli altri valori proposti consultando le figure 2 e 3.