# 174. Esagoni e stelle magiche

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

## SUNTO

In un precedente articolo pubblicato su questa stessa rivista (N.13, agosto 2010) si era parlato dei quadrati magici. Il presente testo intende riprendere l'argomento, trattando questa volta figure diverse dal quadrato che presentano analoghe caratteristiche "magiche", ossia disposizioni di numeri interi in forma geometrica tali che la somma rimanga sempre costante lungo tutti gli allineamenti possibili, che dipendono dalle caratteristiche delle figure stesse. In particolare, saranno esaminate diverse tipologie di esagoni magici e di stelle magiche.

## 1. QUADRATI MAGICI

Prima di cominciare, conviene riepilogare, sia pure in estrema sintesi, alcune considerazioni svolte nell'articolo citato, a partire dalle definizioni che serviranno per la successiva trattazione.
Ricordiamo, dunque, che i quadrati magici di ordine *n* sono matrici quadrate $n \times n$ di numeri interi consecutivi (da 1 a $n^2$) costruite in modo tale che rimanga sempre costante la somma di ogni riga, colonna o diagonale principale.

Tale somma è definita "costante magica", e si può ricavare con la semplice formula $\frac{(n^3+n)}{2}$.
Aggiungiamo che non è possibile costruire un quadrato magico di ordine 2, mentre per tutti gli altri ordini vi sono quadrati magici in un numero che cresce al crescere di n, diventando ben presto esorbitante: senza contare rotazioni e riflessioni, esiste un quadrato di ordine 3, ce ne sono 880 di ordine 4 e ben 275.305.224 di ordine 5. Per l'ordine 6 non è mai stato calcolato il numero esatto di soluzioni, ma si stima che i quadrati magici distinti siano all'incirca 17 miliardi di miliardi.
Nella figura seguente si vede il quadrato magico di ordine 3, di origine cinese, noto come "Lo Shu".

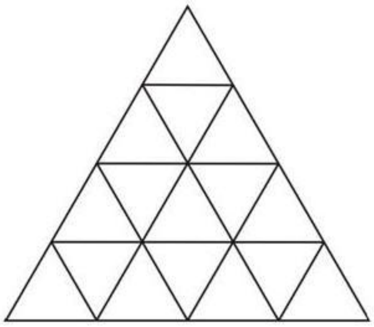
| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Per completezza, ricordiamo anche alcune tipologie particolari di quadrati magici descritte nell'articolo citato:
**Quadrati diabolici**: quadrati che hanno la somma costante anche sulle diagonali "spezzate".
**Quadrati etero magici**: quadrati che si comportano esattamente al contrario rispetto a quelli magici: la somma di righe, colonne e diagonali deve essere sempre diversa.
**Quadrati antimagici**: quadrati eteromagici con un importante vincolo in più: la somma costruita su righe, colonne e diagonali deve dare una sequenza di numeri consecutivi.
Inoltre, eliminando il vincolo che i numeri contenuti nel quadrato siano consecutivi e partano da 1, si possono avere ulteriori varianti sul tema:
**Quadrati magici moltiplicativi**: quadrati magici rispetto alla moltiplicazione anziché rispetto all'addizione.
**Quadrati magici additivi-moltiplicativi**: quadrati magici sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione.

**Quadrati bimagici**: quadrati che rimangono magici anche se tutti i numeri che li compongono vengono elevati alla seconda.
**Quadrati magici di numeri primi**: quadrati composti esclusivamente da numeri primi.

## 2. TRIANGOLI MAGICI?

Di primo acchito, si potrebbe pensare che non sia difficile costruire figure magiche similari utilizzando altri tipi di poligoni regolari. In realtà, non è affatto così: non esiste alcuna figura magica formata da pentagoni, ettagoni, ottagoni o poligoni qualsiasi con un numero di lati superiore.
La dimostrazione si basa su semplici considerazioni geometriche.
Per costruire una figura magica con tanti poligoni regolari uguali tra loro occorre che i poligoni stessi possano essere accostati l'uno all'altro lungo un lato in modo da riempire il piano senza lasciare alcuno spazio.[1] Ma la misura degli angoli interni di ogni "cella" deve essere un divisore intero di 360 - i gradi dell'angolo giro - per cui gli unici poligoni regolari che possono andar bene sono il triangolo equilatero (che ha angoli interni di 60°), il quadrato (angoli interni di 90°) o l'esagono regolare (angoli interni di 120°).
Con qualsiasi altro poligono regolare si può al più costruire una banale figura magica costituita da una sola cella in cui si inserisce il numero 1.
Esaminiamo, allora, il caso del triangolo equilatero, a partire da un'immagine che, nella fattispecie, raffigura la struttura di un eventuale triangolo magico di ordine 4.



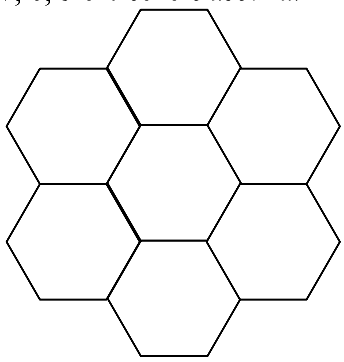
Basta uno sguardo alla figura per rendersi conto che non c'è nessuna possibilità di far sì che diventi magica inserendo i numeri nei vari triangolini.
Infatti, le celle poste ai vertici costituiscono esse stesse una delle linee su cui calcolare la somma, per cui dovrebbero contenere tutte e tre lo stesso numero, pari alla costante magica. Ma se anche si volesse - data la particolare configurazione - eliminare il vincolo che tutti i numeri siano diversi tra loro, non otterremmo egualmente alcun miglioramento, in quanto le tre celle suddette costituiscono ciascuna una riga, ma nello stesso tempo sono parte di un'altra riga, in un'altra direzione. Dunque, dovrebbero contenere un numero che equivale alla costante magica, ma contemporaneamente è soltanto una parte di essa.

## 3 - ESAGONI MAGICI

Escluso il triangolo, non rimane che provare a vedere che cosa succede nel caso dell'esagono regolare.
In sostanza, si tratta di accostare tante cellette esagonali, unite lungo uno dei lati, fino a formare la classica struttura dell'alveare. A questo punto, si considera un esagono composto da un numero eguale di celle lungo i suoi tre lati esterni e successivamente si inserisce in ogni cella un numero intero, cercando di far sì che la somma delle righe nelle tre direzioni sia sempre la stessa.
Si può evidenziare una prima, significativa differenza (che, peraltro, non costituisce un problema) rispetto al quadrato magico: mentre questo ha lo stesso numero di celle lungo le sue due direzioni - righe e

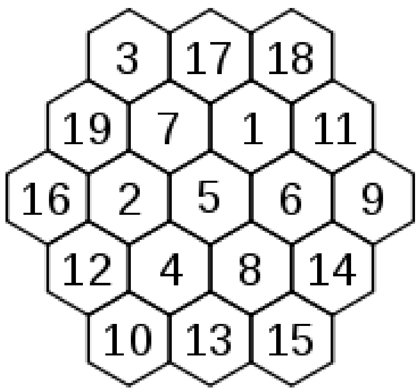
[1] In matematica si esprime questo concetto dicendo che una determinata figura ha la proprietà di "tassellare" il piano. Si veda in proposito: Carlo Sintini, *La tassellatura del piano*, sul sito Matematicamente.it (ottobre 2012).

colonne - nel caso dell'esagono non è così. Ad esempio, l'esagono di ordine 4 è composto da 37 celle, ripartite in sette file che hanno 4, 5, 6, 7, 6, 5 e 4 celle ciascuna.



Esaminiamo adesso il primo esagono non banale, quello di ordine 2.
Come si vede nella figura, l'esagono è costituito da sette celle, ma non è in alcun modo possibile inserire nelle celle stesse i numeri da 1 a 7 in maniera tale da renderlo magico. Infatti, le righe da considerare sono tre, ma la somma dei primi 7 numeri interi equivale a 28, che non è divisibile per 3.

**Esagoni magici "puri"**
Occorre, dunque, passare al successivo esagono, che ha ordine 3 ed è composto da 19 celle ripartite su 5 file. La somma dei primi 19 numeri interi vale 190; dunque, stavolta la costante magica (38) è un numero intero, per cui un esagono magico è teoricamente possibile.
E tale esagono esiste effettivamente, come si vede nella seguente figura.

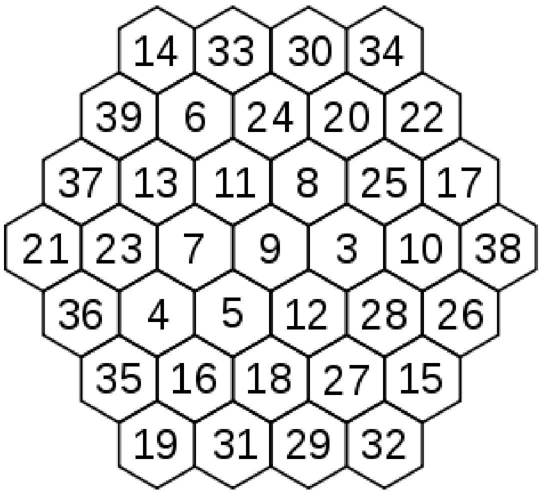


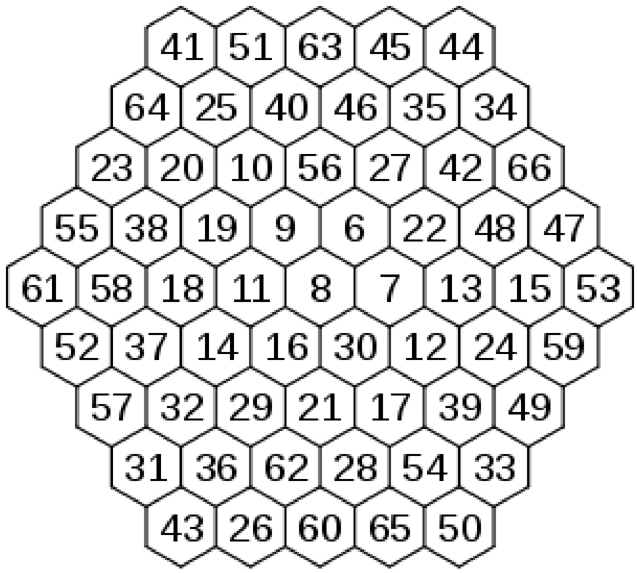

L'esagono magico di ordine 3 è un "prodotto" piuttosto recente: il primo a trattarlo è stato l'architetto tedesco Ernst von Haselberg, nel 1887; successivamente, è stato pubblicato più volte in diverse opere che trattano di matematica ricreativa.
Ma come mai non esiste alcun riferimento all'esagono magico prima di fine '800, mentre i quadrati magici sono noti sin dall'antichità? Ciò si deve al fatto che le due figure si comportano in modo diametralmente opposto: mentre non è difficile trovare una soluzione al problema del quadrato magico, almeno per alcuni ordini,[2] costruire un esagono magico costituisce un quesito estremamente complicato da risolvere.[3]
Non considerando le possibili disposizioni simmetriche rispetto agli assi, per l'esagono di ordine tre esiste soltanto la soluzione riportata nella precedente figura. Ma c'è di più: espandendo l'esagono il numero di

[2] Nel già citato articolo *Quadrati magici*, ad esempio, viene descritto un procedimento estremamente semplice per creare un quadrato magico di qualsiasi ordine n, con n pari e divisibile per 4.
[3] Il "guru" della matematica ricreativa, lo statunitense Martin Gardner, riporta in proposito il curioso aneddoto di un ferroviere che - dopo oltre 40 anni di tentativi - aveva trovato la soluzione dell'esagono magico di ordine 3, poi l'aveva persa e ritrovata nuovamente. Vedi: M.Gardner, *Enigmi e giochi matematici - Volume 5*, Sansoni, 1976.

soluzioni non aumenta, come si potrebbe immaginare; al contrario, non esiste nessun esagono magico per nessun ordine superiore a tre.
La dimostrazione non richiede particolari conoscenze matematiche: basta calcolare la costante magica in funzione del numero di righe dell'esagono, poi con pochi passaggi si ottiene una formula polinomiale nella quale il termine noto vale 5/2n-1. Ovviamente, gli unici valori per cui tale quantità è intera sono 1 e 3, che conducono o al banale esagono di una sola casella o a quello visto nella figura precedente.
La stupefacente conclusione è che - per usare le parole di Martin Gardner - mentre esistono innumerevoli quadrati magici di qualsiasi ordine (2 escluso), tra le infinite, possibili disposizioni di numeri in una forma esagonale, una ed una sola è "magica"!

**Esagoni "quasi magici"**
Se non esistono esagoni magici "puri" di ordine maggiore di 3, è però possibile costruire degli esagoni "quasi magici" eliminando qualcuno dei vincoli; in particolare, quello per cui gli n numeri consecutivi debbano iniziare da 1.
Ne sono un esempio due esagoni di ordine 4 e 5 scoperti una decina d'anni fa dall'ucraino Arsen Zahray; si tratta degli esagoni "quasi magici" con i numeri più piccoli possibili.

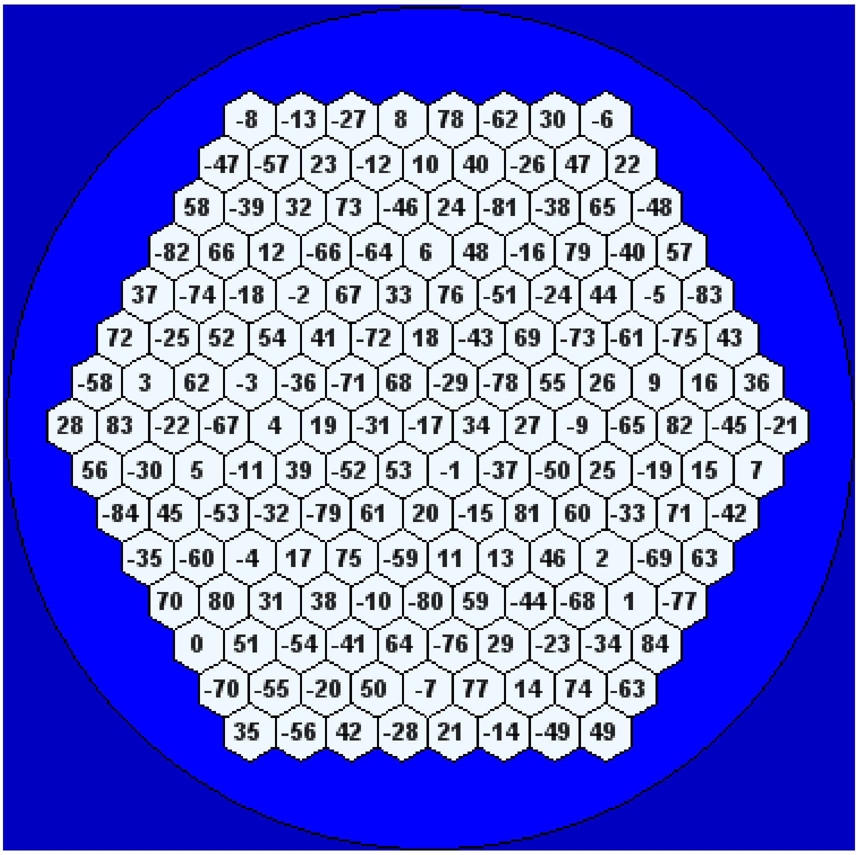



L'esagono di ordine 4 inizia con il numero 3, termina con 39 e la sua costante magica è 111; quello di ordine 5 contiene i numeri da 6 a 66 e la sua costante magica vale 244.[4]

Prima di concludere questo paragrafo, vale la pena di segnalare un altro tipo di esagono "quasi magico" scoperto da Louis Hoelbling, sempre nel 2006 (evidentemente, un anno assai favorevole per gli appassionati dell'argomento!); questa volta - a differenza dei casi precedenti - vengono presi in considerazione anche i numeri negativi.
In particolare, si tratta di un esagono di ordine 8 formato da 169 celle contenenti tutti gli interi da -84 a +84; la sua costante magica vale … zero.

[4] Lo stesso Zahray ha scoperto, nel 2006, il più grande esagono "quasi magico" attualmente conosciuto: è di ordine 7, comprende i numeri da 2 a 128 ed ha una costante magica pari a 635.



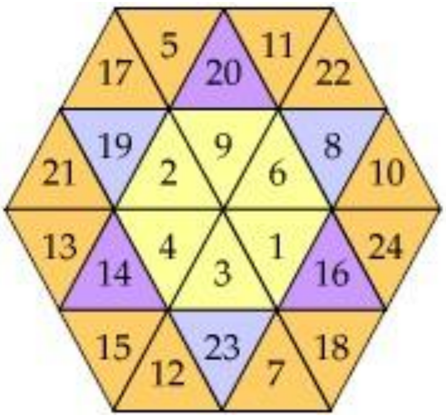

**T-esagoni**

Un'altra variante sul tema è costituita dai cosiddetti T-esagoni magici; anch'essi - come gli esagoni "quasi magici" visti in precedenza - costituiscono una novità nel panorama della matematica ricreativa: sono stati studiati, infatti, soltanto nei primi anni del nuovo millennio.[5]

I T-esagoni magici sono esagoni suddivisi al loro interno in tanti triangolini; i numeri - sempre interi e consecutivi a partire da 1 - devono essere inseriti all'interno dei triangolini suddetti in modo da dare la stessa somma per ogni linea.

Il caso più semplice di T-esagono (ordine 1) è quello di un normale esagono regolare suddiviso in 6 triangoli equilateri; evidentemente, questa figura non può essere in alcun modo resa magica.

Le cose cambiano passando all'ordine immediatamente successivo.




[5] Il primo T-esagono di ordine 2 è stato ideato da John Baker nel 2003; successivamente, lo stesso Baker e David King hanno dimostrato che esistono esattamente 59.674.527 T-esagoni diversi di ordine 2.

Il T-esagono raffigurato nell'immagine, per l'appunto di ordine 2, contiene i numeri da 1 a 24 (somma totale 300) e la sua costante magica vale 75.
Più in generale, un T-esagono di ordine n ha 2n righe, è formato da $6n^2$ triangolini e la somma di tutti i suoi numeri è data dalla formula $S = 6n^2 \frac{(6n^2+1)}{2}$. Da qui si ricava facilmente la sua costante magica, che è S/2n, ossia $3n^2 \frac{(6n^2+1)}{2n}$.
Vediamo brevemente alcune caratteristiche dei T-esagoni magici.
In primo luogo, il suo ordine deve essere necessariamente pari, come si evince dalla formula per la costante magica appena vista.
Un'altra proprietà interessante è che la somma dei numeri contenuti nei triangoli rivolti verso l'alto è sempre uguale alla somma dei numeri contenuti nei triangoli rivolti verso il basso. Nella figura, ad esempio, si ha: 17+20+22+21+2+6+10+14+3+16+12+7 = 5+11+19+9+8+13+4+1+24+15+18 = 150.
Per concludere, si riporta una serie di dati relativi ai primi T-esagoni magici fino all'ordine 12.

| Ordine | Numero di triangolini | Somma totale | ***Numero di file*** | ***Costante magica*** |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 24 | 300 | 4 | 75 |
| 4 | 96 | 4656 | 8 | 582 |
| 6 | 216 | 23.436 | 12 | 1.953 |
| 8 | 384 | 73.920 | 16 | 4.620 |
| 10 | 600 | 180.300 | 20 | 9.015 |
| 12 | 864 | 373.680 | 24 | 15.570 |
| n | $6n^2$ | $6n^2*(6n^2+1)/2$ | 2n | $3n^2*(6n^2+1)/2n$ |

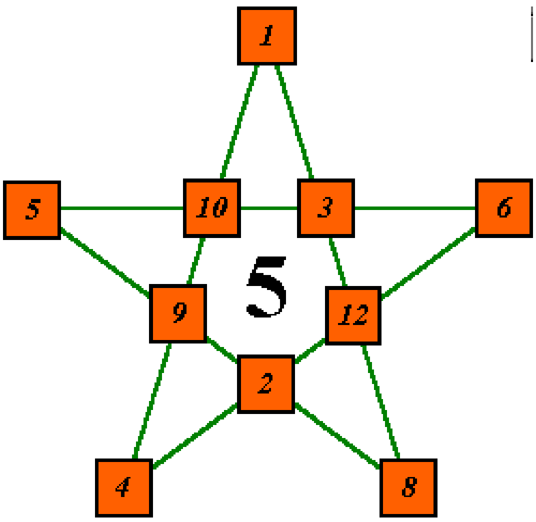
Non è ancora stato calcolato il numero di soluzioni distinte per un generico T-esagono magico di ordine n, ma - visto quanto si è detto nella nota precedente riguardo all'ordine 2 - è presumibile che si tratti di numeri di proporzioni esorbitanti.

## 4 - STELLE MAGICHE

Come si è visto, non è possibile ottenere figure magiche con poligoni regolari diversi dal quadrato e dall'esagono. Esiste, però, un'altra tipologia di figure che ben si prestano per giochi di "magia" e che vale la pena di esaminare: i poligoni regolari stellati.
Evidentemente, in questo caso non si può parlare di celle, ma i numeri - che devono essere sempre interi e consecutivi, a partire da 1 - vanno collocati nei vertici e nei punti di intersezione tra i lati della stella.
Le figure proposte nel prosieguo della trattazione chiariranno le regole di costruzione della stella magica meglio di qualsiasi spiegazione teorica.

**Stelle "quasi magiche"**

Il primo poligono stellato possibile è quello a 5 punte, il ben noto "pentagramma" o "pentalfa" le cui caratteristiche geometriche furono studiate già dagli antichi greci.[6]
Tenendo conto che vi sono in tutto 10 punti su cui scrivere i numeri (somma totale pari a 55), che le linee sono 5 e che ogni numero appartiene a due linee diverse, si deduce che la costante magica della stella è 55/5*2 = 22.
Più in generale, la costante magica di una stella a n punte è data dalla formula 4n+2.
Ma l'esistenza di una costante magica non assicura la certezza di poter costruire una stella magica; proprio questo è il caso del pentagramma, che non è possibile rendere magico in alcun modo. Il "massimo" che si riesce a ottenere è una stella che utilizza i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, saltando il 7 e l'11.
Nella figura seguente si vede, per l'appunto, questo pentagramma "quasi magico", in cui la somma delle righe è costante e vale 24.[7]

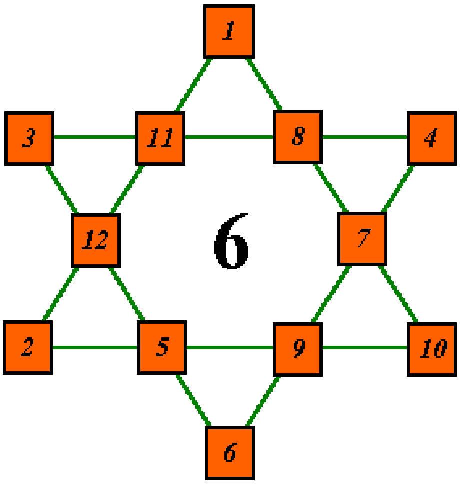



**Stelle magiche "pure"**

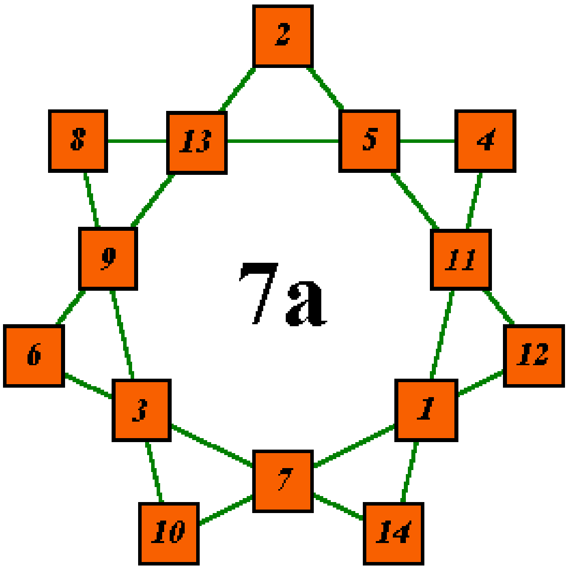
È sufficiente, però, aumentare di 1 il numero delle punte affinché la costruzione di un poligono stellato magico "puro" diventi possibile: si tratta della cosiddetta "Stella di Davide", formata da due triangoli equilateri sovrapposti e intrecciati. Tale stella comprende tutti i numeri interi da 1 a 12 e ha una costante magica pari a 26.

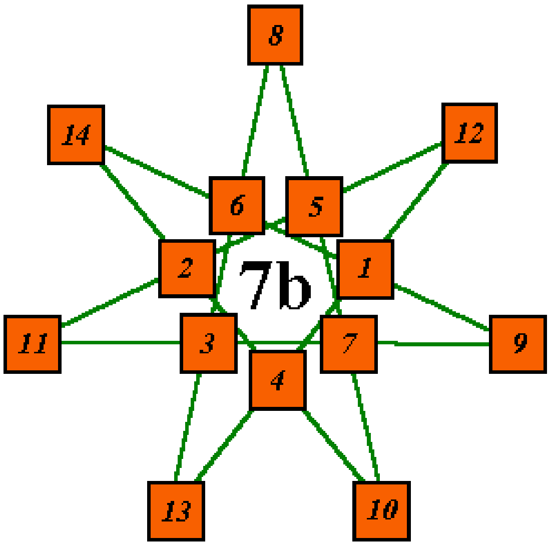
---

[6] Il pentagramma fu studiato approfonditamente dalla scuola pitagorica, per i suoi significati simbolici e per le sue molteplici relazioni con il numero aureo φ.
[7] Per completezza, va aggiunto che con questo accorgimento è possibile ottenere 12 soluzioni distinte.




L'esempio riportato ha una peculiarità degna di nota, che potremmo paragonare alla somma lungo le diagonali spezzate dei quadrati magici: la somma dei numeri indicati sui 6 vertici della stella dà anch'essa la costante magica, 26.
L'esagramma magico ha complessivamente 80 soluzioni distinte.
Dalle 6 punte in poi è sempre possibile costruire stelle magiche, e il numero delle soluzioni - com'è facile immaginare - tende ad aumentare al crescere del numero di punte.[8]
A questo punto, però, la questione diventa più complessa rispetto al caso dei poligoni regolari, in quanto mentre il quadrato o l'esagono magico sono rappresentabili in un'unica maniera, la stella magica può assumere diverse configurazioni.
In particolare, se esistono un solo tipo di pentagramma e un solo tipo di esagramma (quelli visti nelle figure precedenti), già a partire dalle 7 punte le stelle possono assumere più forme diverse: ecco, ad esempio, le due configurazioni possibili per l'ettagramma.

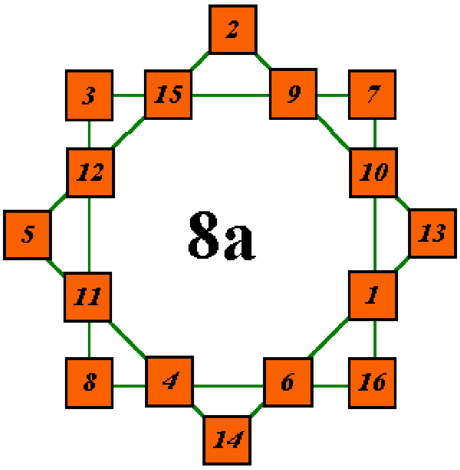


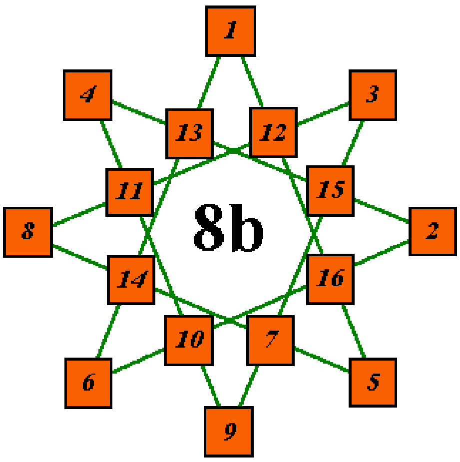




Inoltre, vi sono altri due elementi importanti da tenere in considerazione nell'analisi delle stelle magiche.

[8] Vi sono, però, due eccezioni: le stelle a 6 e 10 punte hanno rispettivamente più soluzioni di quelle con 7 e 11 punte (si veda in proposito la tabella alla fine del capitolo).

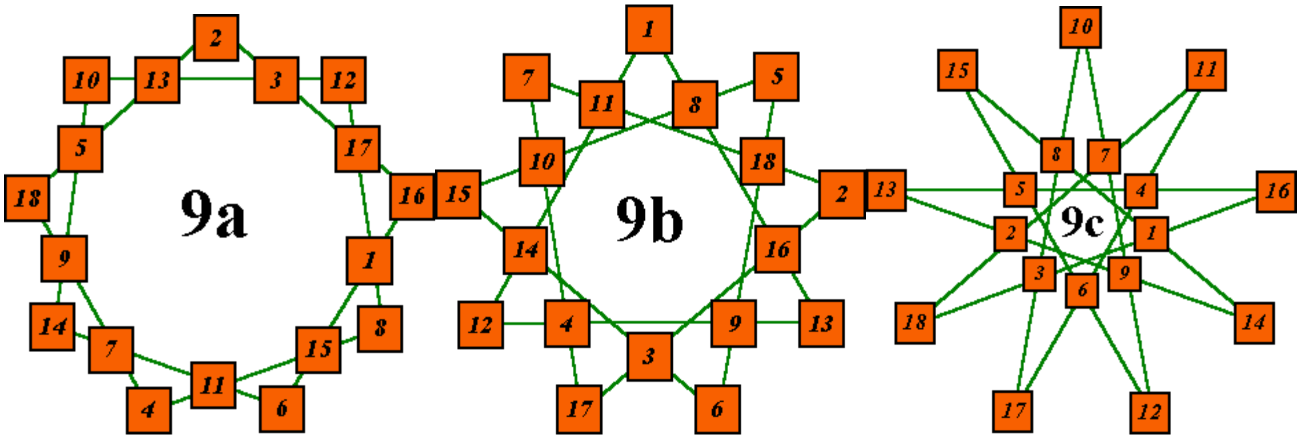
Il primo elemento è l'esistenza o meno di un cammino continuo, tale - cioè - che partendo da uno qualsiasi dei vertici si possa tracciare l'intera stella e tornare al vertice di partenza senza staccare la matita dal foglio. Se il numero di punte della stella è primo, tutte le configurazioni possibili hanno cammini continui, mentre se il numero è composto esistono cammini sia continui sia non continui.[9]
Ovviamente, visto che 7 è primo, nel caso dell'ettagramma entrambe le tipologie di stelle prevedono un cammino continuo. Inoltre, per tutti e due i modelli vi sono esattamente 72 soluzioni distinte che rendono magica la stella.
Il secondo elemento - che è già percepibile nello schema 7b e che si amplifica sempre più per gli ordini superiori - è il seguente: aumentano i punti di intersezione tra le diverse linee della stella, per cui sarebbe possibile collocare altri numeri su ogni linea, ridefinendo conseguentemente la somma totale dei numeri stessi e la relativa costante magica.
In particolare, nello schema 7b si potrebbero inserire altri 7 numeri negli incroci "liberi" (quelli più interni); la somma totale diventerebbe allora 231 e la costante magica varrebbe 231/7*2 = 62.
A questo punto, si aprirebbe tutto un "mondo nuovo", data la possibilità di costruire altre stelle magiche sommando 6 numeri per ogni linea (come nel caso appena visto) oppure 8 o 10 o 12 e così via al crescere dell'ordine della stella.
È evidente, però, che proseguendo su questa strada le tipologie possibili di stelle magiche aumenterebbero a dismisura, per cui segnaliamo questo possibile sviluppo senza approfondirlo, mentre nel presente testo si continueranno a prendere in considerazione soltanto le soluzioni "canoniche", relative al caso standard di 4 punti di intersezione su ogni linea della stella.
Esaurita questa digressione, riprendiamo l'analisi generale con la stella a 8 punte, che può presentarsi in due diverse tipologie, una delle quali con un cammino non continuo. Tale situazione si verifica quando la stella è costruita sovrapponendo e intrecciando tra loro due quadrati (figura 8a).
La stella 8a ha anche una particolarità interessante: la somma dei numeri indicati nei vertici dei due quadrati sovrapposti equivale in entrambi i casi alla costante magica.[10]



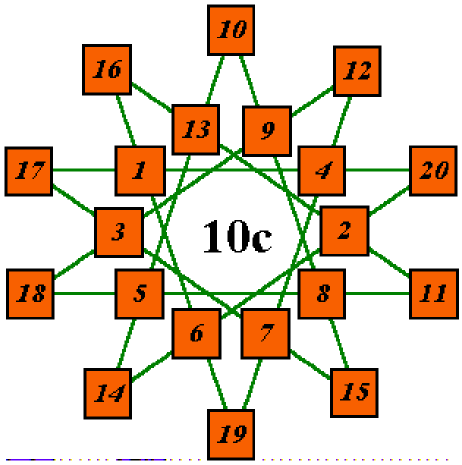




Con la stella magica a 9 punte si sale di un'unità nel numero delle possibili configurazioni, che sono adesso tre, due delle quali prevedono un cammino continuo.

[9] Fa eccezione la stella a 6 punte, per la quale il cammino dell'unica configurazione possibile non è continuo.
[10] In qualunque disposizione che prevede due poligoni regolari sovrapposti e intrecciati la somma dei numeri indicati nei vertici dell'uno e dell'altro è la stessa, ma generalmente non equivale alla costante magica, come in questo esempio.




Mentre gli schemi 9a e 9c non presentano particolari novità rispetto a quanto visto finora, il 9b è assai più significativo, poiché raffigura la prima stella magica che si ottiene sovrapponendo e intrecciando tre poligoni regolari, in questo caso tre triangoli equilateri.
Ma non finisce qui; passando all'ordine 10 c'è un'ulteriore novità: la possibilità di costruire una stella magica sovrapponendo non più poligoni regolari, ma poligoni regolari stellati. Il modello 10c, che qui riportiamo,[11] è costruito, per l'appunto, sovrapponendo e intrecciando tra loro due pentagrammi.




Come si vede, aumentando il numero delle punte, le stelle magiche presentano un numero di possibili varianti che cresce sempre più: cammini continui e non continui, sovrapposizioni di due o più poligoni regolari, sovrapposizioni di due o più stelle di ordine inferiore…
Ad esempio - sulla falsariga di quanto visto in precedenza - si può determinare che tra le quattro possibili configurazioni della stella magica di ordine 12 una prevede un cammino continuo, mentre le altre tre sono costituite da figure sovrapposte e intrecciate; in particolare:

- 4 triangoli equilateri
- 3 quadrati
- 2 stelle regolari di ordine 6.

L'analisi potrebbe continuare, ma - per non appesantire troppo il discorso - conviene fermarsi qui.
Vale la pena, però, di concludere il discorso con una tabella che riassume le principali caratteristiche delle stelle magiche fino all'ordine 12, compreso il numero di soluzioni distinte (accertato o stimato).

[11] Tralasciamo i modelli 10a e 10b, che non aggiungono niente di nuovo.

| Punte | Costante magica | Cammini continui | Cammini non continui | Totale tipologie diverse | Soluzioni distinte[12] |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 22 | 1 | | 1 | Nessuna |
| 6 | 26 | | 1 | 1 | 80 |
| 7 | 30 | 2 | | 2 | 72 |
| 8 | 34 | 1 | 1 | 2 | 112 |
| 9 | 38 | 2 | 1 | 3 | 1.676 - 3.014 |
| 10 | 42 | 2 | 1 | 3 | 10.882 - 115.552 |
| 11 | 46 | 4 | | 4 | 53.528 - 75.940 |
| 12 | 50 | 1 | 3 | 4 | oltre 800.000 |
| n | 4n+2 | ... | ... | $\lfloor (n-3)/2 \rfloor$ | ... |

12 L'ultima colonna può riportare due valori: in tal caso si tratta del numero minimo e massimo di soluzioni distinte esistenti per le diverse tipologie di stella possibili per quel determinato ordine.