

• Numero 17 – Aprile 2012 •



Spiral
by Mc-Q

<http://www.flickr.com/photos/mc-q/1248857667/>

TEOREMI INVERSI DI PITAGORA ED EUCLIDE – LUNULE E LENTI –
SEGMENTI PARALLELI – LABORATORIO DI PITAGORA – SIMMETRIE –
ATTRAVERSAMENTO DEL FIUME - LIBRI

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La Redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della Direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la Redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La Redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla Redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 2.5: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo

antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi

lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin

flaviocimolin@matematicamente.it

Diego Alberto - Luca Barletta - Michele

Mazzucato - Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Stefano Borgogni, Nicola Carachino, Alfino

Grasso, Giovanni Lucca, Enrico Maranzana,

Daniela Molinari, Bruno Sanchini.

Sommario

167. teoremi inversi di Pitagora e di Euclide, alcuni aspetti storici, epistemologici e didattici	5
Nicola Carachino	
168. Catene di cerchi all'interno di lunule e lenti	14
Giovanni Lucca	
169. Segmenti paralleli	20
Bruno Sanchini	
170. Laboratorio di matematica: il teorema di Pitagora.	34
Enrico Maranzana	
171. Simmetrie e risoluzione di problemi di minimo e massimo per mezzo della geometria elementare	41
Alfino Grasso	
172. Attraversamento di un fiume.	47
Stefano Borgogni	
173 Lo scaffale dei libri:	52
<i>L'Universo dei numeri i numeri dell'Universo</i> di Felice Russo	
<i>La misura di tutte le cose. L'avventurosa storia dell'invenzione del sistema metrico decimale</i> di Ken Alder	
<i>I dieci esperimenti più belli – Da Galileo a Millikan</i> di George Johnson	
<i>I pantaloni di Pitagora. Dio, le donne e la matematica</i> di Margaret Wertheim	
<i>La grande invenzione di Bupal</i> di Anna Cerasoli	

Editoriale

In questo numero presentiamo due articoli di didattica relativi ai teoremi di Pitagora ed Euclide, gli autori mettono in evidenza alcuni aspetti a volte trascurati nell'insegnamento. Giovanni Lucca ci presenta uno studio su lunule e lenti all'interno di cerchi. Continua il lavoro di Bruno Sanchini sulla descrizione analitica di alcuni gruppi di segmenti. Alfino Grasso mostra come la simmetria ci aiuti nella risoluzione di problemi semplici e complessi. Infine, la secolare questione dell'attraversamento del fiume e un po' di libri interessanti da leggere.

Antonio Bernardo

167. I teoremi inversi di Pitagora e di Euclide, alcuni aspetti storici, epistemologici e didattici

Nicola Carichino *

SUNTO

Come è stato rilevato da più parti (ad esempio, si veda [13], pag. 1), il teorema inverso di Pitagora e la sua dimostrazione sono scomparsi dai libri di testo senza alcuna ragione. Avendo accertato un analogo fenomeno nei riguardi dei teoremi di Euclide, svolgiamo alcune considerazioni storico/epistemologiche e proponiamo alcune semplici dimostrazioni dei suddetti teoremi inversi.

ABSTRACT

In this paper, after some historical and epistemological remarks, we present some proofs of the inverse theorem of Pitagora and Euclide.

Considerazioni generali

Nella storia della geometria greca occupano un posto significativo i teoremi di Pitagora e di Euclide. In particolare, ciò vale per la geometria euclidea, che per millenni – fino alla scoperta delle geometrie non euclidee – è stata vista come l'unica geometria possibile. Per comodità del lettore, qui di seguito riportiamo i teoremi di Euclide.

Il primo Teorema di Euclide (I T. E.). *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa (Fig. 1. a):*

$$Q_1 \equiv R_1 \quad \text{e} \quad Q_2 \equiv R_2$$

Il secondo Teorema di Euclide (II T.E.). *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensione le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa (Fig. 1. b):*

$$Q_3 \equiv R_3.$$

Però bisogna dire che, negli *Elementi* di Euclide, i due teoremi a cui è stato attribuito il nome del grande maestro appaiono quasi in sordina. Precisamente, il primo compare nel corso della dimostrazione del teorema di Pitagora, posta alla fine del Libro I (si veda [2], Prop. 47, pp. 146 e segg.). Si tratta della più antica dimostrazione a noi pervenuta del teorema di Pitagora. Essa si basa sul fatto che la perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa divide il quadrato costruito sull'ipotenusa in due rettangoli equivalenti ai rispettivi quadrati costruiti sui cateti (doppia applicazione del **I T. E.**).

Quindi il **I T. E.** in [2] non ha nemmeno il rilievo di una proposizione autonoma. Invece, il **II T. E.** è presente a p. 375 di [2] – in forma leggermente diversa – come conseguenza della Proposizione 8 del Libro VI. Quest'ultima afferma: *Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dell'angolo retto sulla base, la stessa perpendicolare divide il triangolo in due triangoli simili a tutto quanto il triangolo e tra loro.*

Dalla suddetta proposizione si fa scaturire un corollario, chiaramente equivalente a **II T. E.**, che viene espresso così: È da ciò evidente che, se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la retta così condotta è media proporzionale fra le parti nelle quali essa divide la base.

Solo in seguito, quando si capì l'importanza sia di **I T. E.** che di **II T. E.**, essi assunsero una loro dignità e una loro connotazione precisa, con la denominazione di Teoremi di Euclide.

* I.I.S. "F. Bottazzi" – Casarano (LE).

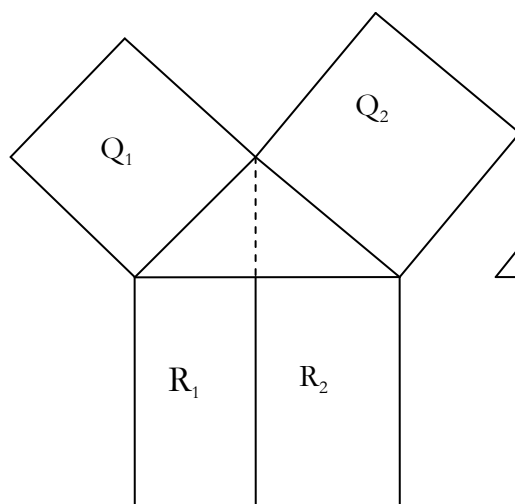


Fig. 1a

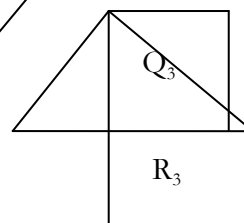


Fig. 1b

Il teorema di Pitagora e il suo inverso

Se c'è un teorema di matematica che va annoverato tra quelli più conosciuti, esso è sicuramente quello di Pitagora, che è stato definito *il primo grande teorema* (si veda [5], p. 26). Questo perché pare che, con esso, per la prima volta sia stata dimostrata un'importante proposizione matematica. Come è noto, il suo enunciato afferma che *in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti*.

Una leggenda racconta che Pitagora abbia intuito il teorema che porta il suo nome mentre era a Samo, in una stanza del palazzo del tiranno Policrate. Pitagora, nell'attesa di essere ricevuto da Policrate, da attento osservatore, notò che la forma del pavimento aveva una configurazione geometrica particolare: era formata da quadrati uguali (si veda Fig. 2) ciascuno dei quali era diviso dalle due diagonali.

Egli constatò – come un semplice conto conferma, considerando il disegno evidenziato in grassetto in Fig. 2 – che l'estensione del quadrato sull'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo isoscele era equivalente a quella dei quadrati sui due cateti. Sollecitato da questa osservazione, successivamente dimostrò la validità di questa proposizione per tutti i triangoli rettangoli.

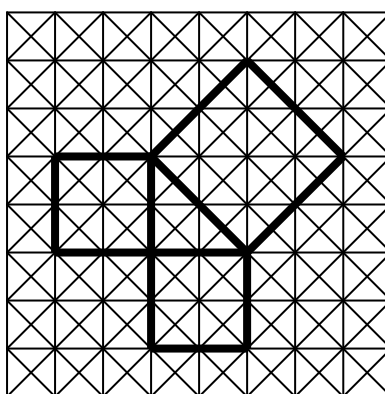


Fig. 2

In [8] D. Lenzi presenta quella che potrebbe essere stata l'idea intuitiva che portò Pitagora a osservare e a dimostrare – usando proprietà delle figure simili – il suo teorema nel caso generale. Va però ricordato quanto A. Frajese scrive in [2] (p.146, nota 35): “[...] È di dubbio valore l'attribuzione effettiva a Pitagora di questo celebre teorema [...] già dai tempi di Platone non si aveva modo di distinguere l'opera personale di Pitagora da quella della scuola sorta attorno a lui [...]”. Tuttavia, Frajese nella stessa nota ricorda che, stando a Diogene

Laerzio, Apollodoro *il calcolatore* avrebbe affermato che Pitagora sacrificò un'ecatombe (cento buoi) per aver scoperto il suo teorema.

Nessun altro teorema ha avuto nel corso dei secoli uno studio così profondo e tante dimostrazioni. Elisha Scott Loomis (1852-1940) ha raccolto nel libro “The Pythagorean Proposition” moltissime dimostrazioni del teorema di Pitagora. Vi sono quelle di scienziati di chiara fama, illustri personaggi come il Presidente degli USA J. A. Garfield (1831-1881), sino a matematici dilettanti. Nella seconda edizione del suo testo (si veda [11]) Loomis ha raccolto ben 370 diverse dimostrazioni. Una analogha indagine è stata fatta anche da C. Mazzei, presidente della sezione Mathesis di Crotona ([8], pag. 39).

Secondo lo storico della matematica H. G. Zeuthen (1839-1920) è stato il teorema di Pitagora l'origine della geometria razionale nella Scuola Pitagorica, nel senso che fu il desiderio di dimostrare il teorema di Pitagora che spinse i Pitagorici a costruire la geometria con il metodo assiomatico (si veda [16] e [17])¹. Ebbene, anche se – come si diceva – il teorema di Pitagora avrebbe dato i natali alla dimostrazione geometrica per via assiomatica, non meno importante è il suo inverso, soprattutto per l'aspetto applicativo. L'enunciato di quest'ultimo afferma che *in ogni triangolo, se il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati, il triangolo è rettangolo*.

Come hanno evidenziato A. Scimone e F. Spagnolo con un monitoraggio da loro effettuato: “[...] *l'inverso del teorema di Pitagora è scomparso da molti manuali scolastici italiani dai primi del novecento ad oggi [...]*” (si veda [14], pag.1).

Non è facile capire se questa scelta sia dovuta a esigenze temporali nell'attività didattica o se sia espressamente voluta; comunque, senza entrare in merito a tale questione, per ulteriori spunti di riflessione rinviamo a [14]; ove i due autori, tra l'altro, a pag.5 osservano: “[...] *l'inverso del teorema di Pitagora, non è un risultato secondario che possa essere tralasciato senza alcun commento, perché esso costituisce la condizione sufficiente perché un triangolo sia rettangolo [...]*”.

Euclide pone il teorema inverso di Pitagora nella Proposizione 48 – alla fine del Libro I degli *Elementi* (si veda [2], pag. 149), che noi riportiamo qui sotto – e lo dimostra utilizzando il teorema di Pitagora e il terzo criterio di uguaglianza per i triangoli.

Proposizione 48. *Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.*

Proporremo una dimostrazione alternativa rispetto a quella euclidea. Come vedremo, tale dimostrazione si può presentare in modo estremamente intuitivo – ricorrendo a un'ovvia proprietà dei compassi – e si basa, oltre che sul Teorema di Pitagora, sulla Proposizione 24 degli *Elementi* (si veda [2], p. 114). Com'è facilmente intuibile, il teorema inverso di Pitagora offre un metodo per costruire triangoli rettangoli, ovvero per tracciare angoli retti. Infatti, se un triangolo ha i lati le cui lunghezze a , b , c soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, l'angolo formato dai segmenti di lunghezza a e b è retto; per cui, basta costruire un triangolo con queste caratteristiche ed essere certi che l'angolo interno formato dai lati di lunghezza a e b è retto. Una particolare terna numerica che soddisfa la relazione precedente è costituita dai numeri 3, 4, 5.

Secondo alcune tradizioni, gli antichi Egizi sapevano che un triangolo di lati 3, 4 e 5 – proprio per il fatto che $3^2 + 4^2 = 5^2$ – era rettangolo. Questa informazione è stata tramandata dalla seguente leggenda. I contadini Egiziani avevano ogni anno la necessità di ripristinare i confini della loro proprietà, in quanto essi venivano cancellati a causa delle inondazioni del fiume Nilo; ebbene, gli agrimensori locali, per ri-disegnare con esattezza gli angoli retti degli appezzamenti da riassegnare ai legittimi proprietari, si servivano di una corda a forma di triangolo con i lati di lunghezza 3, 4 e 5 (rispetto a un intervallo unitario opportuno).

Come è noto, la terna (3, 4, 5) rappresenta una delle infinite *terne pitagoriche* (a , b , c), caratterizzate dalla proprietà di essere costituite da numeri naturali non nulli tali che $a^2 + b^2 = c^2$.

¹ L'ipotesi di Zeuthen è stata ripresa recentemente da P. Odifreddi, che in [12] fa vedere quali assunzioni sono necessarie per dimostrare il teorema di Pitagora.

La Proposizione 24 degli Elementi afferma, in modo un po' involuto: *Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno la base maggiore della base*².

Ecco allora come si può dare una dimostrazione semplice e “concreta” del Teorema inverso di Pitagora.

Infatti, i lati del triangolo di cui all'enunciato della Proposizione 48, che sono i “candidati cateti” del nostro triangolo rettangolo, consideriamoli come i bracci [eventualmente diversi, rispettivamente di lunghezza a e b] di un compasso che abbia un'apertura angolare coincidente con l'angolo formato dai suddetti lati; perciò il terzo lato – “il candidato ipotenusa”, di lunghezza c – corrisponde al segmento ideale che congiunge le punte del nostro compasso. Onde risulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ora, se la suddetta apertura angolare non è un angolo retto, supponiamo che essa sia un angolo ottuso. Quindi restringendo quell'apertura fino a farla diventare un angolo retto, avremo un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza c' minore di c , che è la lunghezza del terzo lato del triangolo di partenza. Di conseguenza per il triangolo rettangolo così ottenuto la classica relazione pitagorica sui lati non varrebbe, poiché risulterebbe $a^2 + b^2 > c'^2$. Il che è assurdo.

Un discorso analogo lo si farebbe se quell'apertura angolare fosse un angolo acuto.

Ma ecco una dimostrazione più rigorosa. Abbiamo per ipotesi:

$$(BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

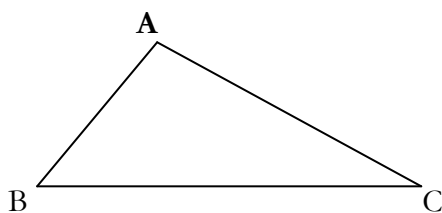


Fig. 3

Supponiamo, per assurdo, che l'angolo BAC non sia retto. Quindi consideriamo un triangolo rettangolo $B'A'C'$ tale che l'angolo in A' sia retto, con $B'A' = BA$ e con $A'C' = AC$; per il teorema di Pitagora risulta:

$$(B'A')^2 + (A'C')^2 = (B'C')^2$$

Perciò, dato che $B'A' = BA$ e $A'C' = AC$, dalle uguaglianze (1.1) e (1.2) si ricava subito che $BC = B'C'$. Il che è assurdo, dato che la citata Proposizione 24 degli *Elementi* assicura che se l'angolo BAC è acuto, allora $BC < B'C'$; mentre se l'angolo BAC è ottuso, allora $BC > B'C'$ ■

I teoremi inversi di Euclide

È comprensibile il fatto che Euclide negli *Elementi* non faccia alcun riferimento agli inversi dei due teoremi che in seguito presero nome da lui, visto che egli non diede particolare importanza a questi due teoremi. Quello che è sorprendente, però, è che tale vuoto si riscontra anche in quasi tutti i manuali scolastici utilizzati nelle scuole medie, infatti da una vasta consultazione effettuata da noi, solo nel testo *Elementi di Matematica, Teoria*, di G. Bucchini, E. Magi, A. Gambardella, ed. Calderoni, BO, 1995, sono riportati gli enunciati dei due teoremi inversi.

Ebbene, constatando questo vuoto editoriale e didattico, qui vogliamo richiamare l'attenzione dei colleghi su questo fenomeno diffuso, invitandoli a non limitare l'insegnamento ai due teoremi di

² Recentemente, in [9], C. De Mitrì e D. Lenzi hanno perfezionato la dimostrazione di questa proposizione, che essi – per ovvie ragioni – hanno denominato *teorema del compasso*.

Euclide, trascurando i rispettivi inversi, in quanto la loro conoscenza determina due ulteriori caratterizzazioni dei triangoli rettangoli.

Nelle pagine seguenti, per facilitare l'aspetto divulgativo, svolgeremo semplici dimostrazioni di questi due teoremi.

Osservazione. Nell'enunciare i teoremi inversi di Euclide noi faremo riferimento a un triangolo ABC tale che la proiezione H di A su BC sia interna al lato, in quanto, se così non fosse, il triangolo ABC non risulterebbe rettangolo, nonostante siano rispettivamente soddisfatte le condizioni date nel primo oppure nel secondo teorema di Euclide.

Infatti la seguente Fig. 4 ci fa capire che – fermi restando i punti A e B [onde resta fermo anche H] – il punto C (pur essendo B interno al segmento HC) può essere situato in una posizione tale che il quadrato costruito su AH sia equivalente al rettangolo di lati BH e HC , anche se l'angolo BAC è acuto. Precisamente, questa per B è la posizione in cui, considerato il suo simmetrico B' rispetto ad H , è l'angolo $B'AC$ che risulta essere retto ■

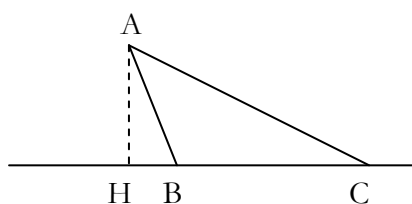


Fig. 4

Teorema inverso del I di Euclide. *Sia ABC un triangolo tale che la proiezione H di A su BC sia interna al lato BC . Inoltre Q sia il quadrato costruito sul lato AB ed R sia il rettangolo di lati BH e BC . Se Q è equivalente a R , allora l'angolo BAC è retto.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che l'angolo BAC non sia retto, onde potrebbe essere ottuso o acuto. Se esso è ottuso, allora esiste un punto M interno al lato HC tale che l'angolo BAM sia retto (Fig. 5).

Allora, per il I teorema di Euclide, si ha che Q è equivalente al rettangolo di lati BH e BM .

Poiché per ipotesi Q è equivalente al rettangolo di lati BH e BC , ne segue che BM è uguale a BC , il che è assurdo, dato che il lato BM è interno al lato BC .

Considerazioni simili si possono svolgere ipotizzando che l'angolo BAC sia acuto. In tal caso il punto M sarà situato sul prolungamento del segmento HC dalla parte di C ■

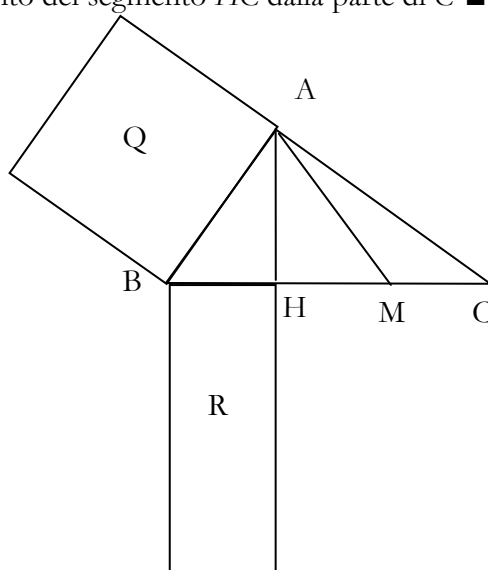


Fig. 5

Teorema inverso del II di Euclide. Sia ABC un triangolo tale che la proiezione H di A su BC sia interna al lato BC . Inoltre Q_1 sia il quadrato costruito sul lato AH ed R_1 sia il rettangolo di lati BH e HC . Se Q_1 è equivalente a R_1 , allora l'angolo BAC è retto.

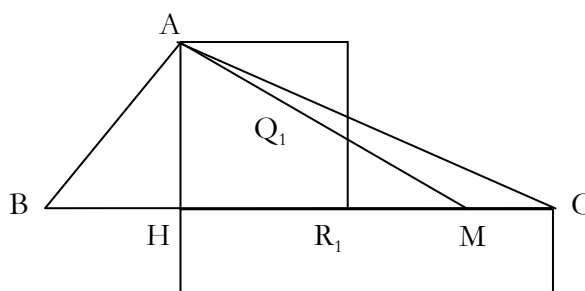


Fig. 6

Dimostrazione. Come nel teorema precedente, supponiamo, per assurdo, che l'angolo BAC non sia retto. Potrebbe essere allora ottuso o acuto, onde possiamo considerare un punto M situato sulla semiretta HC , in modo tale che BAM sia retto (Fig. 6). Quindi si può proseguire in modo analogo a quello della dimostrazione del teorema precedente ■

Bibliografia

- [1] Bucchini G. – Gambardella A. – Magi E., *Elementi di Matematica. Teoria*, Calderoni, BO, 1995.
- [2] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, (1970).
- [3] Enriques F., *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Vol. I. Ed. Stock, RM, (1924); Vol. II, Zanichelli, BO, 1930; Vol. III, ivi (1932); Vol. IV, ivi (1935).
- [4] Enriques F. – Amaldi U., *Elementi di geometria, Parte I/II*, Zanichelli, BO, 1970.
- [5] Eves H., *Great Moments in Mathematics (before 1650)*, The Mathematical Association of America, Washington, 1980.
- [6] Giusti E., *Pitagora e il suo teorema*, Polistampa, FI, 2001.
- [7] Heath Sir T., *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications, Inc., N.Y., 1981.
- [8] Lenzi D., Dal teorema di De Giorgi-Nash al teorema di Pitagora: un salto a ritroso di venticinque secoli segnati dalla costanza ricerca della verità scientifica, *Periodico di Matematiche*, Vol. 2°, N. 1, 2002, pp.33-44.
- [9] De Mitri C. e Lenzi D., *Euclide e il teorema mancante*, Matematicamente.it Magazine, N. 12 (2010).
- [10] Lidonnici A., *Il teorema di Pitagora nelle civiltà pre-elleniche ed in Grecia*, *Periodico di Matematiche*, 1933, nn.2,3,4. RM, 1951.
- [11] Loomis E. S., *The Pythagorean Proposition*, Reprint to the 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968.
- [12] Odifreddi P., *Divertimento geometrico. Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert*, Bollati Boringhieri, TO, Ristampa 2004.
- [13] Scimone A. e Spagnolo F., Alcune difficoltà con il caro vecchio Teorema di Pitagora, Prospettive per una ricerca. GRIM – Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, Via Archirafi 34 – 90123. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/convreg1_scimonespa-PA.pdf
- [14] Scimone A. e Spagnolo F., Il caso emblematico dell'inverso del teorema di Pitagora nella storia della trasposizione didattica attraverso i manuali. GRIM – Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/spagnolo_scimone_teorPitagora_04.pdf
- [15] D.Veljan, *The 2500-Year Old Pythagorean Theorem*, *Mathematics Magazine*, Vol.73, N.4, pp.259-272.
- [16] Zeuthen H. G., *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen Age* (ed. danese 1893); trad. francese di Mascart, Parigi (1902).
- [17] Zeuthen H. G., *Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientifique*. Rendiconti del II Congresso Internazionale a Ginevra (1904).

168. Catene di cerchi all'interno di lunule e lenti

Giovanni Lucca
vanni_lucca@inwind.it

Sunto

Studiamo le catene infinite di cerchi che possono formarsi all'interno delle regioni risultanti dall'intersezione di due cerchi.

Abstract

We study the infinite chains of mutually tangent circles that can be formed inside the regions resulting from the intersection of two circles.

1. Introduzione

Si possono disegnare differenti tipi di catene, finite o infinite, composte da cerchi mutuamente tangenti, in relazione alla reciproca posizione di due cerchi principali α e β .

Le più note sono le catene di Steiner [1] che possono essere tracciate all'interno della regione anulare tra due cerchi α e β , uno all'interno dell'altro, non intersecatisi e non coassiali; sono note anche le catene di Pappo [2] che possono formarsi all'interno della regione tra due cerchi tangenti internamente. Infine, può considerarsi il caso in cui α e β sono tangenti esternamente oppure uno dei due cerchi degenera in una retta [3].

Qui vogliamo studiare il caso in cui α e β sono intersecanti formando così le tre regioni mostrate in Fig.1:

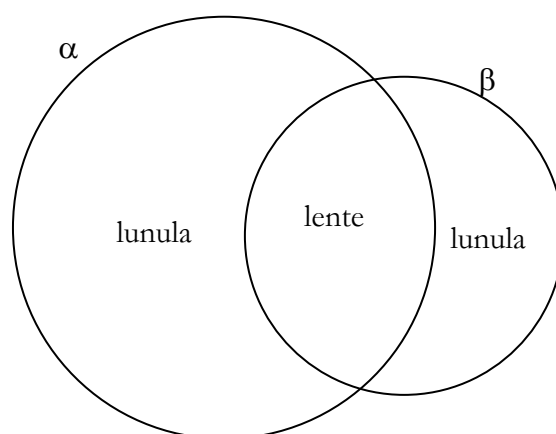


Fig.1: Regioni formate dall'intersezione di due cerchi

La regione comune ad entrambi i cerchi è chiamata *lente*

Le due regioni esterne, appartenenti ad un cerchio soltanto, sono chiamate *lunule*.

Vogliamo studiare le catene infinite di cerchi, mutuamente tangenti, che possono formarsi all'interno di una lente e di una lunula. (Si vedano le Fig. 2a e 2b).

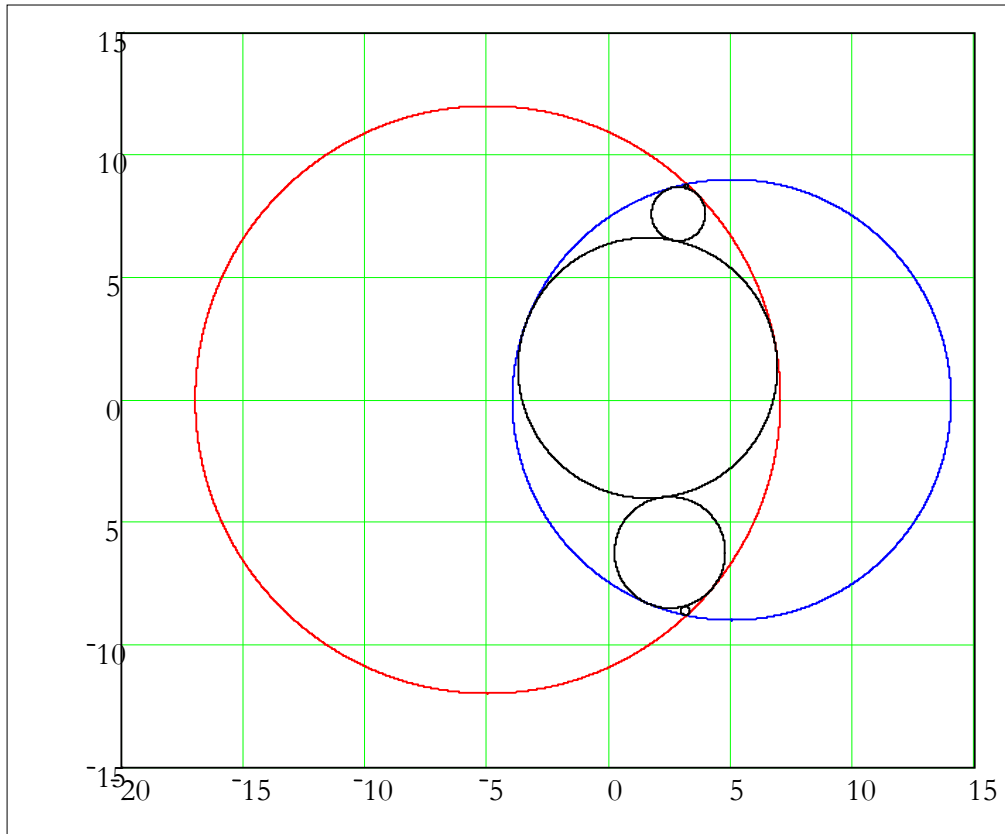


Fig. 2a: Catena di cerchi all'interno di una lente.

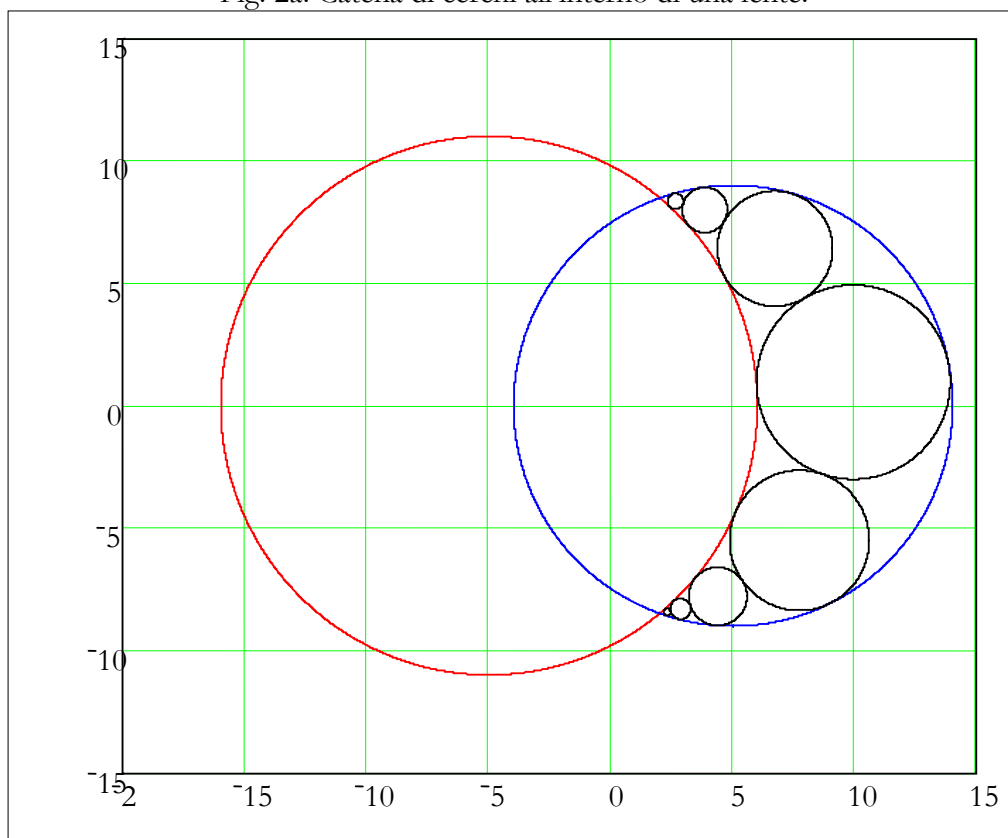


Fig. 2b: Catena di cerchi all'interno di una lunula.

In particolare, determineremo le formule relative alle coordinate del centro e del raggio del generico cerchio i -esimo della catena; inoltre proveremo anche alcune proprietà relative alle catene stesse.

2. Luogo associato ai centri dei cerchi

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano dove due punti A and B, posizionati sull'asse delle x e separati dalla distanza D, hanno rispettivamente coordinate $(-D/2, 0)$ e $(D/2, 0)$. Siano A and B i centri dei due cerchi α e β aventi rispettivamente raggio a e b. Affinché esista l'intersezione tra α e β deve valere la seguente relazione:

$$a + b > D \quad (1)$$

Proviamo ora le seguenti proprietà:

Il centro di ogni cerchio all'interno di una lente e tangente sia ad α che a β giace su una iperbole avente fuochi in A e B ed equazione:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{D^2 - (a-b)^2}}{2}\right)^2} = 1 \quad (2)$$

Il centro di ogni cerchio all'interno di una lunula e tangente sia ad α che a β giace su una ellisse avente fuochi in A e B ed equazione:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a+b)^2 - D^2}}{2}\right)^2} = 1 \quad (3)$$

Al fine di dimostrare la parte a) della proprietà, facciamo riferimento a Fig.3a.

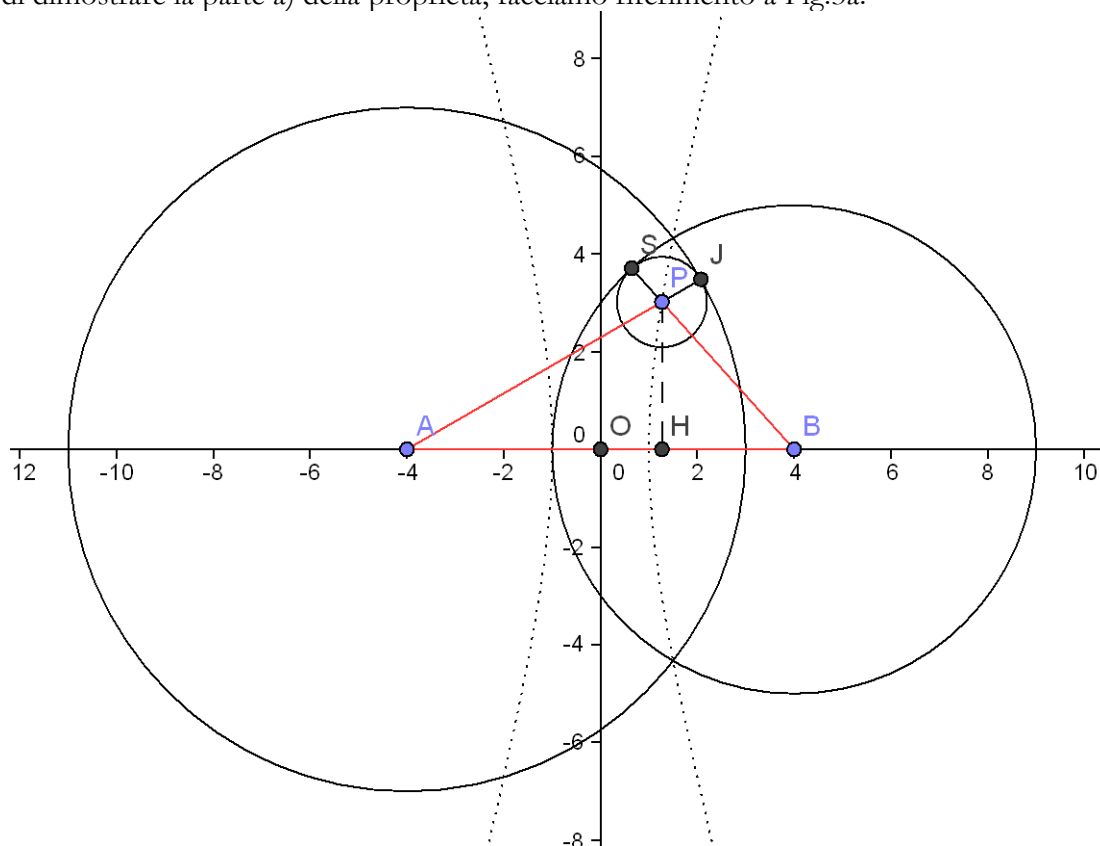


Fig.3a: Cerchio tangente all'interno di una lente.

Il vertice P del triangolo APB, avente coordinate (x, y) , è il centro di un generico cerchio tangente sia ad α (in J) che a β (in S) mentre $PJ=PS=r(y)$ ne è il raggio.

Abbiamo che:

$$AP=a-r(y) \qquad BP=b-r(y) \qquad AB=D$$

Esprimendo l'area del triangolo APB in due differenti modi, cioè attraverso il semiprodotto della base D con l'altezza $PH=y$ e per mezzo del teorema di Erone, possiamo scrivere:

$$\frac{Dy}{2} = \sqrt{\frac{[a+b-2r(y)+D][a+b-2r(y)-D]D+(b-a)D-(b-a)}{2} \frac{D-(b-a)}{2}} \quad (4)$$

da cui si ricava:

$$\frac{4D^2y^2}{D^2-(a-b)^2} + D^2 = [a+b-r(y)]^2 \quad (5)$$

Dalla (5), otteniamo:

$$r(y) = \frac{1}{2} \left(a+b - \sqrt{\frac{4y^2D^2}{D^2-(a-b)^2} + D^2} \right) \quad (6)$$

Inoltre, guardando ai triangoli APH e BPH in Fig.3a, possiamo scrivere:

$$[a-r(y)]^2 - \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 = y^2$$

$$[b-r(y)]^2 - \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 = y^2$$

Eguagliando le equazioni sopra, otteniamo:

$$x = \frac{a^2 - b^2 - 2r(y)(a-b)}{2D} \quad (7)$$

e, sostituendo la (6) nella (7), abbiamo:

$$x(y) = \frac{a-b}{2D} \sqrt{D^2 + \frac{4y^2D^2}{D^2-(a-b)^2}} \quad (8)$$

Infine elevando al quadrato entrambi i membri della (8) si ottiene la equazione (2).

E' immediato verificare, dall'equazione (2), che le coordinate dei fuochi sono coincidenti con quelle dei punti A e B.

Per quanto riguarda il punto b), facciamo riferimento alla Fig.3b.

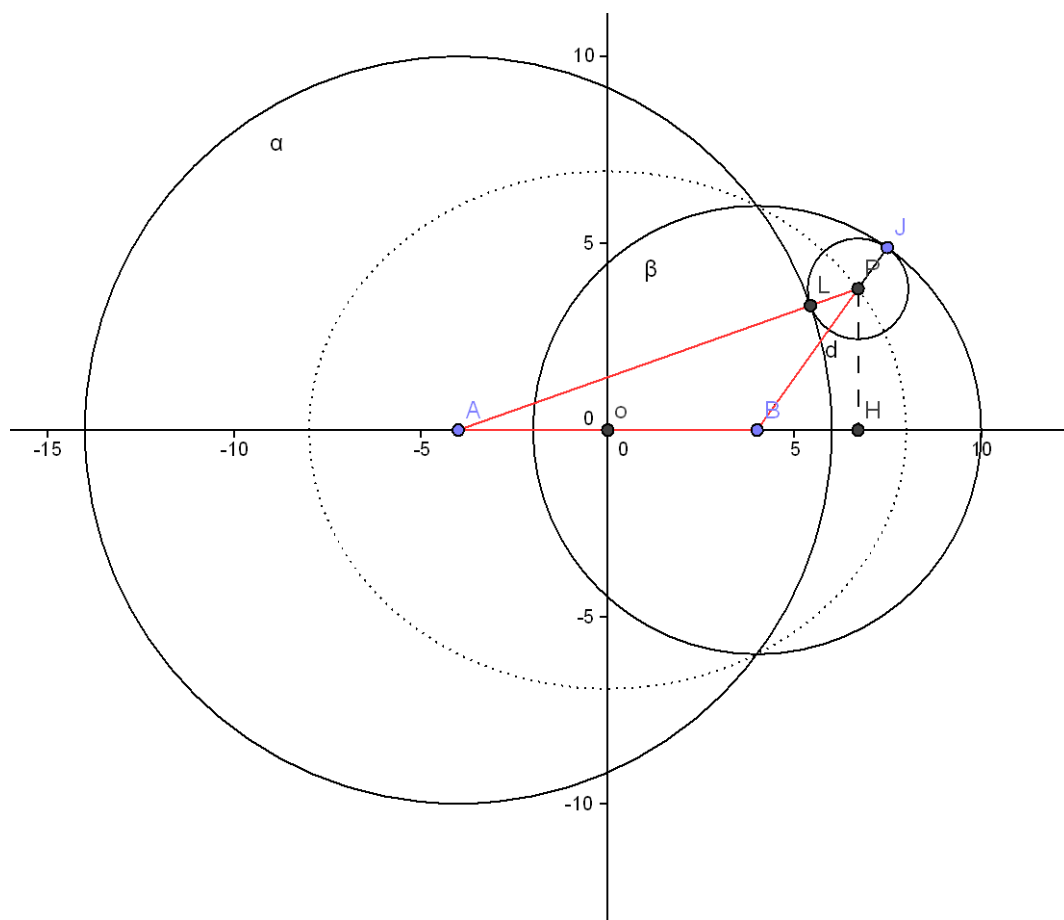


Fig.3b: Cerchio tangente all'interno di una lunula.

La dimostrazione è completamente simile a quella relativa al punto a) con l'unica differenza che, in questo caso, $AP=a+r(y)$.

Valgono le seguenti relazioni:

$$r(y) = \frac{1}{2} \left(-(a-b) + \sqrt{D^2 - \frac{4y^2 D^2}{(a+b)^2 - D^2}} \right) \quad (9)$$

$$x(y) = \frac{a+b}{2D} \left(\sqrt{D^2 - \frac{4y^2 D^2}{(a+b)^2 - D^2}} \right) \quad (10)$$

e quindi, elevando al quadrato entrambi i membri di (10), si ottiene l'equazione (3).

E' immediato verificare, dalla equazione (3), che le coordinate dei fuochi sono coincidenti con quelle dei punti A e B.

Infine, poiché tali proprietà sono valide per ogni generico cerchio tangente sia ad α che a β all'interno di una lente o di una lunula, ne concludiamo che le proprietà valgono per tutti i cerchi di una catena.

3. Coordinate dei centri e raggi dei cerchi della catena

Lo scopo di questo paragrafo è determinare espressioni analitiche per le coordinate del centro e raggio del generico cerchio i -esimo di una catena sia nel caso della lente che nel caso della lunula.

Un metodo conveniente è quello di usare la tecnica dell'inversione circolare [4].

Definiamo dapprima i punti C and D individuati dalla intersezione dei cerchi α e β ; le loro coordinate sono date da:

$$C \equiv \left(\frac{a^2 - b^2}{2D}, \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \right)$$

$$D \equiv \left(\frac{a^2 - b^2}{2D}, -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \right)$$

Se consideriamo come cerchio di inversione γ quello avente centro in D e raggio ρ uguale alla lunghezza del segmento CD cioè:

$$\rho = \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D} \quad (10)$$

abbiamo che i due cerchi α e β sono trasformati rispettivamente rette α' e β' . Si veda la Fig.4.

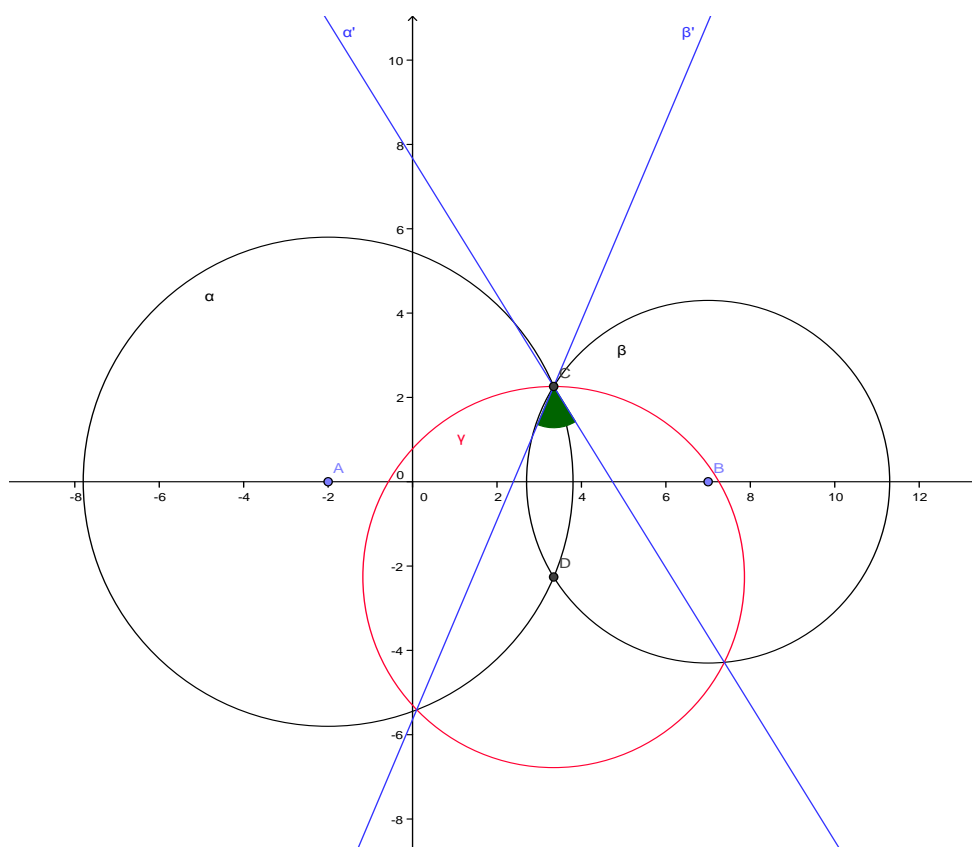


Fig.4: Inversione circolare dei cerchi α e β .

Conviene ora ricordare una proprietà generale di ogni inversione circolare: la tangenza tra cerchi e tra cerchi e rette, è mantenuta anche a seguito della operazione di inversione. Pertanto, le catene di cerchi mostrate nelle Fig.2 sono trasformate nelle catene all'interno della regione compresa tra le rette α' and β' . Si veda la Fig.5a per la lente e la Fig.5b per la lunula.

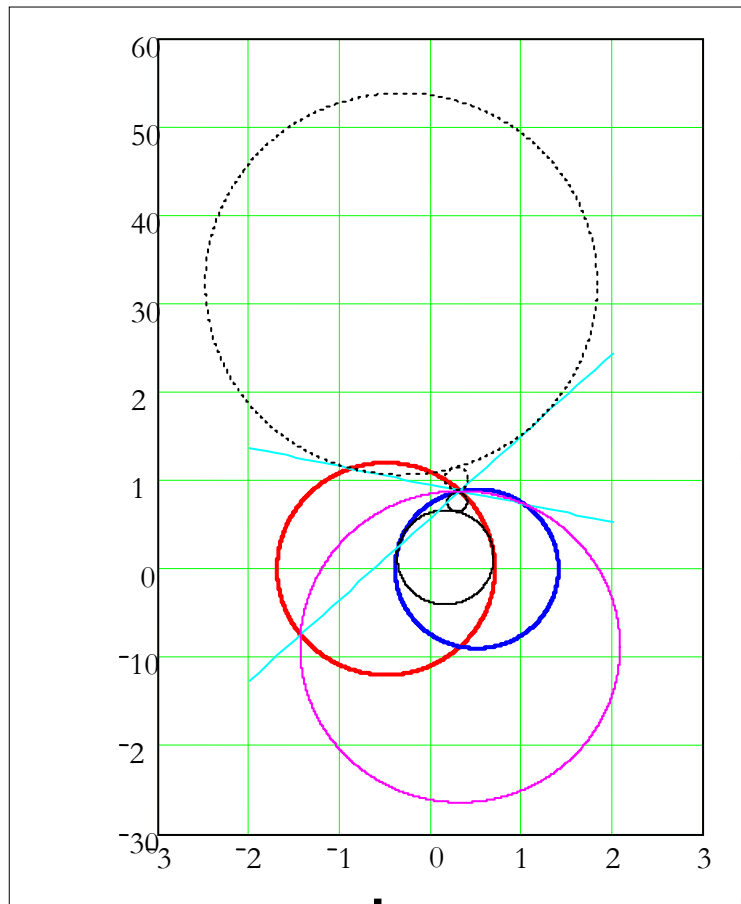


Fig.5a: Inversione (linee tratteggiate) di una catena di cerchi all'interno di una lente.

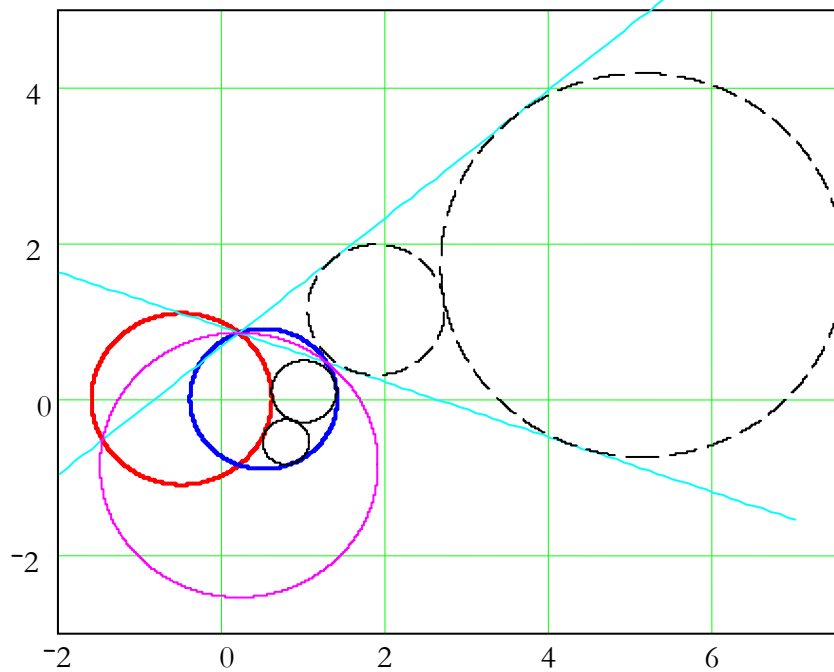


Fig.5b: Inversione (linee tratteggiate) di una catena di cerchi all'interno di una lunula.

Così, per mezzo dell'inversione circolare, abbiamo da risolvere un problema più semplice che consiste nello studiare una catena di cerchi tangenti alle rette α' e β' invece che ai cerchi α e β .

Pertanto, determineremo dapprima le coordinate dei centri (x_i', y_i') ed i raggi r_i' dei cerchi immagine; essi verranno quindi trasformati, in base alle formule di inversione circolare [4], per trovare le relazioni che stiamo cercando.

Tuttavia per determinare (x_i', y_i') ed r_i' , è conveniente utilizzare un altro sistema cartesiano XY avente origine nel punto C e asse X coincidente con la retta α' . In questo sistema di riferimento, le immagini, secondo operazione di inversione, sono mostrate in Fig.6.

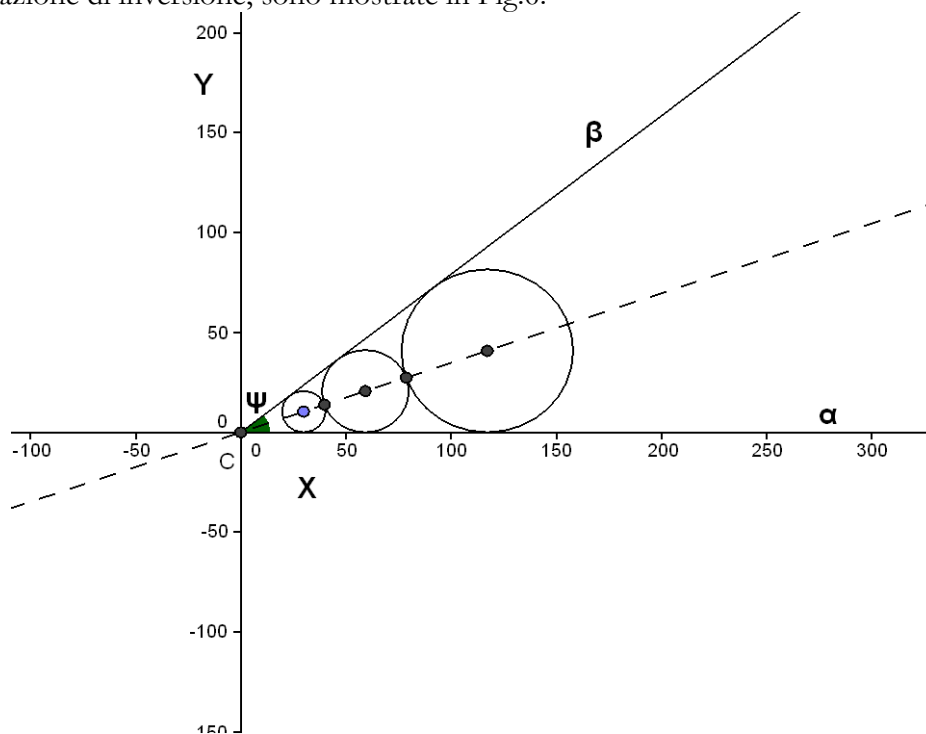


Fig.6: Catena di cerchi nel sistema cartesiano XY .

E' facile vedere che esistono semplici relazioni tra le coordinate dei centri (X_i, Y_i) e raggio r_i' del generico cerchio i -esimo con quelle di un arbitrario cerchio iniziale individuato mediante l'indice 0 cioè:

$$X_i = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i X_0 = K^i X_0 \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

$$Y_i = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i Y_0 = K^i Y_0 \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

$$r_i' = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i r_0' = K^i r_0' \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

$$r'_0 = Y_0 = X_0 \tan \frac{\psi}{2} \quad (14)$$

essendo ψ l'angolo tra le rette α' e β' .

Per il seguito è necessario conoscere le espressioni delle rette α' e β' e del cerchio γ ; in particolare, si può notare che la retta α' è l'asse radicale dei cerchi α e γ mentre la retta β' è l'asse radicale dei cerchi β e γ rispettivamente.

L'equazione del cerchio γ è:

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{D}x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D}y - \frac{6D^2a^2 - 4(a^2 - b^2)^2 + 6b^2D^2 - 3D^4}{4D^2} = 0 \quad (15)$$

mentre le equazioni di α' e β' sono rispettivamente:

$$y = \frac{a^2 - b^2 + D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}x + \frac{-2(a^2 - b^2)^2 + a^2D^2 + 3b^2D^2 - D^4}{2D\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (16)$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 - D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}x + \frac{-2(a^2 - b^2)^2 + 3a^2D^2 + b^2D^2 - D^4}{2D\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (17)$$

Ora, determineremo dapprima le espressioni delle coordinate dei centri e dei raggi delle immagini inverse e quindi le trasformeremo, in accordo con le formule per l'inversione circolare [4], per trovare le relazioni che stiamo cercando.

Per ragioni di brevità e di spazio, presentiamo solo i passaggi ed i risultati fondamentali.

Come precedentemente, suddividiamo i risultati distinguendo il caso della lente da quello della lunula.

A. Formule per la lente

Partendo dalle formule (16) e (17), è possibile determinare $\tan(\psi)$ e quindi possiamo dedurre:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{(a+b)^2 - D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (18)$$

$$K = \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}} \quad (19)$$

Sempre partendo dalle formule (16) e (17) è possibile ottenere le espressioni dei coseni direttori delle rette α' e β' ; infatti, per mezzo di tali espressioni, possiamo scrivere le formule di roto-traslazione atte a trasformare le coordinate dei centri (11) e (12) dal sistema di riferimento ausiliario XY al sistema di riferimento principale xy.

Così, le coordinate dei centri delle immagini inverse sono:

$$x'_i = -\frac{K^i}{D}(a-b)r'_0 + \frac{a^2 - b^2}{2D} \quad (20)$$

$$y'_i = \frac{K^i(a+b)}{D}r'_0 \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{(a+b)^2 - D^2} + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (21)$$

Tenendo conto della (13) e della (19), il raggio r'_i è dato da:

$$r'_i = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}} \right)^i r'_0 \quad (22)$$

Infine, invertendo le (20), (21) e (22), si ottiene:

$$x_i = \frac{a^2 - b^2}{2D} + \frac{-\frac{K^i(a-b)}{D} r'_0}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \quad (23)$$

$$y_i = -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} + \frac{\frac{K^i(a+b)r'_0}{D} \sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} + \sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \quad (24)$$

$$r_i = \left| \frac{1}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \right| K^i r'_0 \quad (25)$$

B. Formule per la lunula

In questo caso, ci si deve ricordare che le immagini inverse non sono contenute nell'area appartenente all'angolo ψ ma in quella appartenente all'angolo supplementare. (Si confrontino le Fig.5a e 5b); pertanto, abbiamo:

$$\tan\left(\frac{\pi - \psi}{2}\right) = \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{(a+b)^2 - D^2} \quad (26)$$

$$K = \frac{1 - \sin\frac{\pi - \psi}{2}}{1 + \sin\frac{\pi - \psi}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}} \quad (27)$$

$$x'_i = \frac{K^i}{D} (a+b)r'_0 + \frac{a^2 - b^2}{2D} \quad (28)$$

$$y'_i = \frac{K^i(a-b)}{D} r'_0 \frac{(a+b)^2 - D^2}{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} + \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (29)$$

$$r'_i = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}} \right)^i r'_0 \quad (30)$$

Infine, invertendo le (28), (29) e (30), si ottiene:

$$x_i = \frac{a^2 - b^2}{2D} + \frac{\frac{K^i(a+b)}{D} r'_0}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \quad (31)$$

$$y_i = -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} + \frac{\frac{K^i(a-b)r'_0}{D} \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D^2 - (a-b)^2} + \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D}}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \quad (32)$$

$$r_i = \left| \frac{1}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \right| K^i r'_0 \quad (33)$$

Le formule (23), (24), (25) e (31), (32), (33) sono espresse in funzione del raggio r'_0 dell'immagine inversiva del primo cerchio della catena; in Appendice si può trovare la formula che mette in relazione r'_0 ed r_0 .

4. Luogo dei punti di tangenza

In questo paragrafo, mostriamo un'altra proprietà relativa ai punti di tangenza tra i cerchi delle catene. Tutti i punti di tangenza tra due cerchi consecutivi di una catena, appartengono ad un medesimo cerchio avente raggio R_t e coordinate del centro (x_t, y_t) le cui espressioni, nel caso della lente, sono date da:

$$R_t = \sqrt{\frac{ab[D^2 - (a-b)^2]}{(a-b)^2}} \quad (34)$$

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{D}{2} \frac{a+b}{a-b}, 0 \right) \quad (35)$$

Nel caso della lunula, esse sono date da:

$$R_t = \sqrt{\frac{ab[(a+b)^2 - D^2]}{(a+b)^2}} \quad (36)$$

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{D}{2} \frac{a-b}{a+b}, 0 \right) \quad (37)$$

Si vedano le Fig. 7a e 7b.

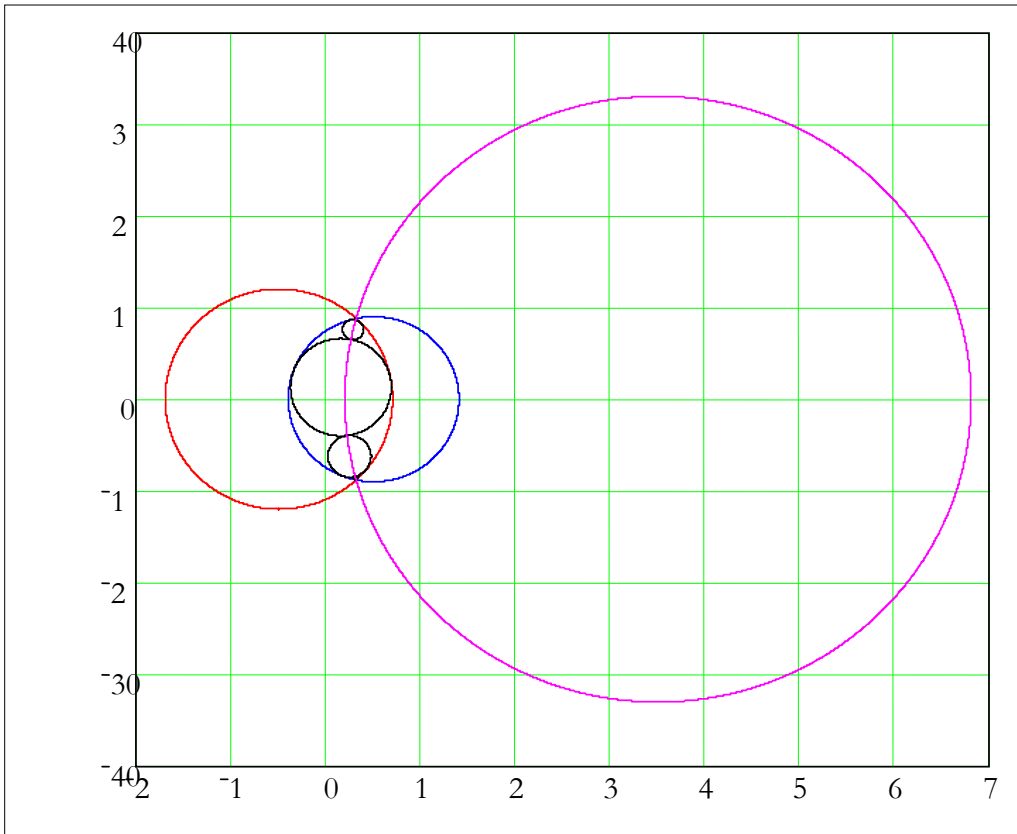


Fig.7a: Luogo dei punti di tangenza; catena di cerchi all'interno di una lente.

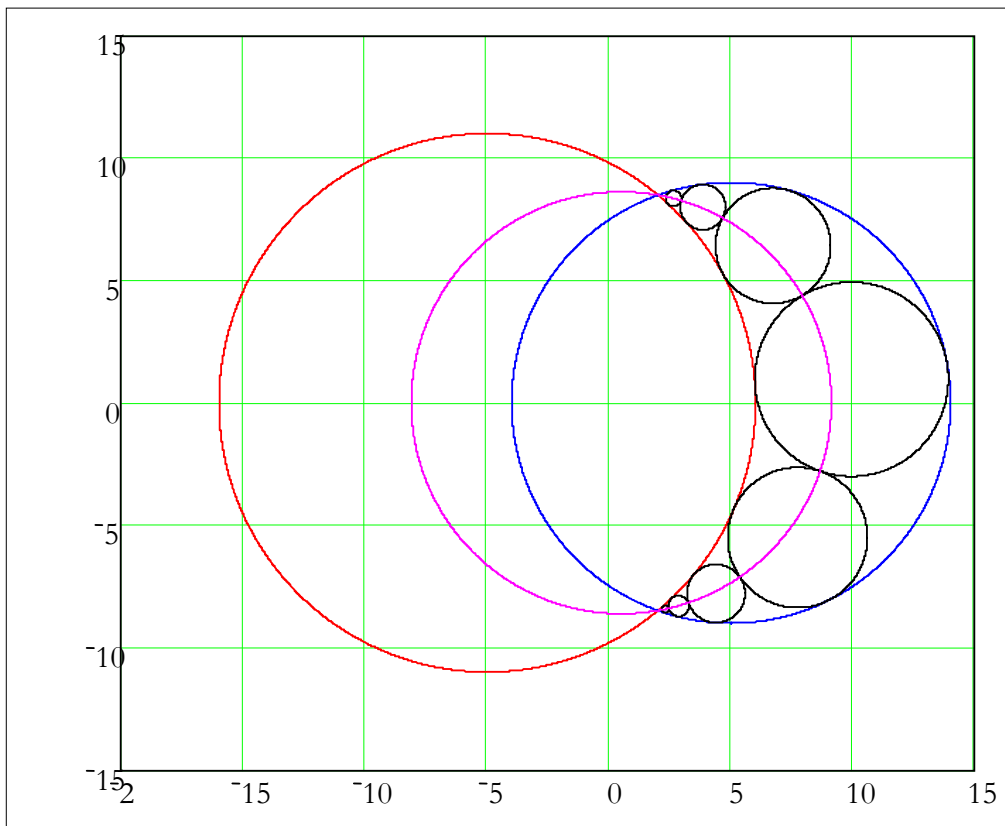


Fig.7b: Luogo dei punti di tangenza; catena di cerchi all'interno di una lunula.

Al fine di provare la (34) e la (35), è conveniente ricordare che l'inversione circolare conserva la tangenza tra differenti curve dopo la trasformazione. Guardando Fig.6, vediamo che tutti i punti di tangenza appartengono alla bisettrice dell'angolo ψ . Tale bisettrice ha equazione:

$$y = \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} (a+b)}{(a-b)[D^2 - (a+b)^2]} x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \frac{D^2 - 2(a+b)^2}{D^2 - (a+b)} \quad (38)$$

L'inversione circolare di tale bisettrice (rispetto al cerchio γ) è il cerchio che stiamo cercando avente equazione:

$$x^2 + y^2 - D \frac{a+b}{a-b} x + \frac{D^2 + 4ab}{4} = 0 \quad (39)$$

da cui si ricavano la (34) e la (35).

In maniera analoga possono essere provate le formule relative alla lunula, cioè la (36) e la (37).

In questo caso, si deve considerare l'angolo supplementare di ψ avente bisettrice data da:

$$y = -\frac{(a-b)[D^2 - (a+b)^2]}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} (a+b)} x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \frac{D^2 - 2(a+b)^2}{D^2 - (a+b)} \quad (40)$$

La sua immagine secondo inversione circolare (rispetto al cerchio γ) è il cerchio avente equazione:

$$x^2 + y^2 - D \frac{a-b}{a+b} x + \frac{D^2 - 4ab}{4} = 0 \quad (41)$$

da cui si ricavano la (36) e la (37).

5. Conclusioni

Abbiamo studiato le catene infinite di cerchi che possono formarsi all'interno delle differenti e duali regioni generate dall'intersezione di due cerchi; cioè lenti e lunule. Tale dualità si riflette nelle formule e nelle proprietà geometriche caratterizzanti le catene.

Appendice

Il primo cerchio della catena individuato mediante l'indice 0 ha ordinata del centro y_0 che può essere scelta arbitrariamente purché sia soddisfatta la seguente condizione:

$$-\frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} < y_0 < \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (A1)$$

La corrispondente ascissa del centro $x_0 = x(y_0)$ può essere calcolata per mezzo della formula (8) o per mezzo della (10) rispettivamente nel caso della lente e della lunula.

Il raggio $r_0 = r(y_0)$ è calcolato per mezzo della (6) o della (9) rispettivamente nel caso della lente o della lunula. Una volta determinato r_0 , il raggio r'_0 dell'immagine inversiva del primo cerchio (che appare nelle formule (23), (24), (25) e (31), (32), (33)) è dato da:

$$r'_0 = \left| \frac{\frac{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}{D^2}}{\left(x_0 - \frac{a^2 - b^2}{2D}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D}\right)^2 - r_0^2} \right| r_0 \quad (A2)$$

Bibliografia

Weisstein, Eric W. "Steiner Chain." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/SteinerChain.html>

van Lamoen, Floor and Weisstein, Eric W. "Pappus Chain." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/PappusChain.html>

H. Tahir. "On the point of contact in infinite chains", *Gazette of the Australian Mathematical Society*, vol. 33 n.4 2006, p.307-315.

Weisstein, Eric W. "Inversion." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>

169. Segmenti paralleli

Bruno Sanchini
 brunosanchini@yahoo.it

Sunto

Si utilizza il sistema:
$$\begin{cases} |y| = \tan \theta |x| + k(b - a \tan \theta) \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta + ak)^2 \end{cases}$$
 di una grande famiglia di superfici.
 Lo scopo di questo studio è la ricerca di segmenti paralleli nel piano e nello spazio.

Using the system:
$$\begin{cases} |y| = \tan \theta |x| + k(b - a \tan \theta) \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta + ak)^2 \end{cases}$$
 of a great family of surfaces.
 The aim of this study is to research parallel segments on a plane and in space.

Introduzione

Per la ricerca, sarà opportuno descrivere il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \tan \theta |x| + k(b - a \tan \theta) \\ (ak)^2 \leq x^2 \leq (R \cos^n \theta + ak)^2 \end{cases} \quad (1)$$

introdotto nel sunto, con $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n \geq 1$ (intero); $R > 0$; $a \geq 0$, $b \geq 0$ (non contemporaneamente uguali a zero);

$P_k(ak, bk)$, che nel piano cartesiano ortogonale oxy rappresenta una superficie, formata da infiniti segmenti uscenti "a raggiera" dal punto P_k per formare con l'asse delle x degli angoli θ con $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$; simmetrica rispetto agli assi cartesiani ortogonali oxy .

Se $n = 1$ il sistema rappresenta infiniti settori circolari.

Se $n = 2$ il sistema rappresenta infiniti semicerchi.

Superfici diverse si avranno quando $n > 2$.

Per ragioni di spazio mi limiterò a considerare sistemi e figure solo quando $n = 2$.

Segmenti paralleli nel piano

A partire dal sistema precedente (1), se della doppia disuguaglianza dei valori di x , considero i valori di $|x| = R \cos^n \theta + ak$ quando $\theta = \theta_0$, con $\theta_0 > 0^\circ$ e $\theta_0 < 90^\circ$, avrò $|x| = R \cos^n \theta_0 + ak$; e a seguire: se sull'equazione a 2 incognite x e y del sistema sostituisco $|x|$ con $|x| = R \cos^n \theta_0 + ak$, avrò:

$$|y| = R \cos^n \theta_0 \tan \theta + bk$$

perciò, il sistema:
$$\begin{cases} |y| = R \cos^n \theta_0 \tan \theta + bk \\ |x| = R \cos^n \theta_0 + ak \end{cases}$$
 che, con

$0^\circ \leq \theta \leq \theta_0 < 90^\circ$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n \geq 1$ (intero); $R > 0$; $a \geq 0$, $b \geq 0$ (non contemporaneamente uguali a zero);

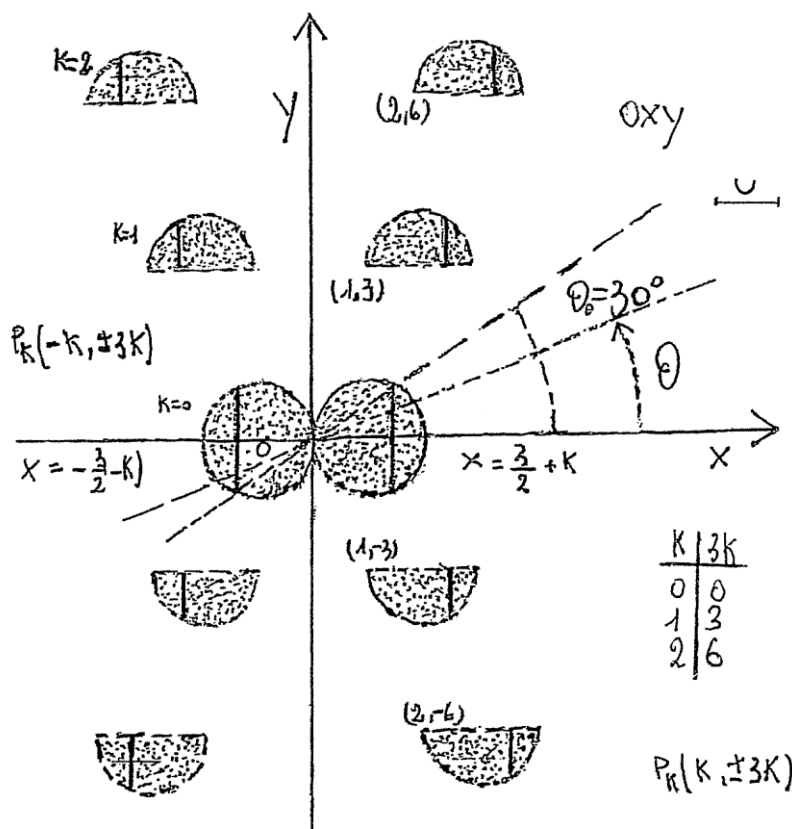
$P_k(ak, bk)$, rappresenterà nel piano oxy una curva simmetrica rispetto agli assi, formata da infiniti segmenti uguali, però non uguali ai due segmenti uguali che si hanno quando $k = 0$; comunque, tutti paralleli tra di loro. Per ogni valore di $k \neq 0$ si hanno 2 coppie di segmenti.

Seguono alcuni esempi.

Esempio 1. Con $\theta_0 = 30^\circ$; $n=2$; $R=2$; $a=1$; $b=3$ il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + 3k \\ |x| = \frac{3}{2} + k \end{cases} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ; \quad k=0,1,2,3,\dots$$

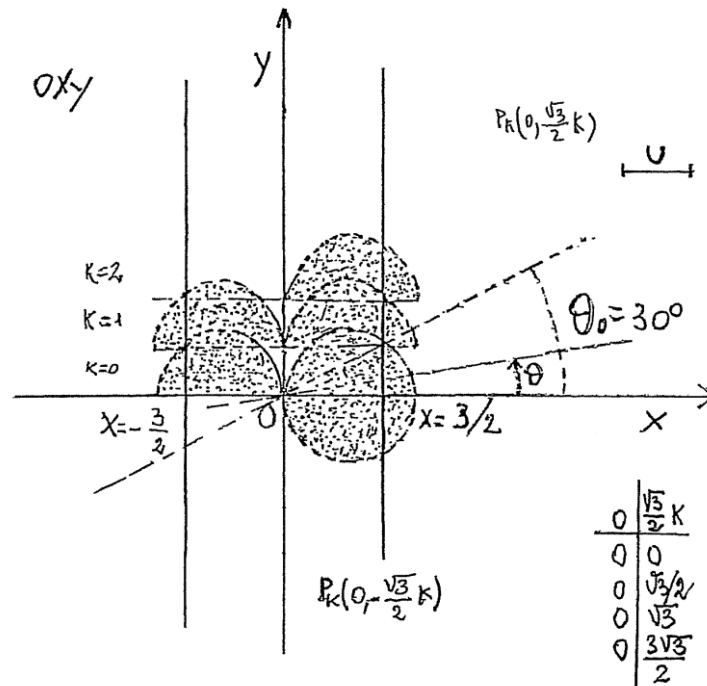
e, quindi la curva:



Esempio 2. Con $\theta_0 = 30^\circ$; $n=2$; $R=2$; $a=0$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k \\ |x| = \frac{3}{2} \end{cases} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ; \quad k=0,1,2,3,\dots$$

e, quindi la curva:



È una curva costituita da due rette parallele, simmetrica rispetto agli assi cartesiani, di equazione $|x| = \frac{3}{2}$.

Tali rette sono formate da infiniti segmenti uguali che si hanno per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (qui, anche per $k = 0$, considero due coppie di segmenti). Le due rette si dicono: **rette modulari**.

Rotazione di segmenti nello spazio

Riconsiderata la famiglia dei segmenti paralleli, se nello spazio cartesiano ortogonale oxy li faccio ruotare di $1/2$ giro attorno all'asse delle y , avrò una superficie rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = (R \cos^n \theta + ak)^2 \\ |y| = R \cos^n \theta \tan \theta + bk \end{cases} \quad 0^\circ \leq \theta \leq \theta_0 < 90^\circ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

e composta da infiniti segmenti.

Seguono due altri esempi.

Esempio 3. Se $n = 2$; $R = 2$; $a = 0$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta_0 = 30^\circ$, il sistema che ne consegue:

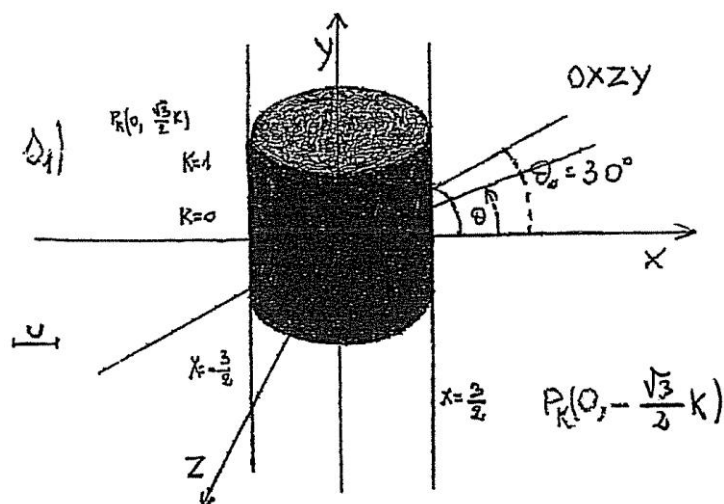
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k \end{cases} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avrà come diagramma una superficie ottenuta dalla rotazione di due rette modulari attorno all'asse delle y , di mezzo giro, per i valori $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Esattamente, si tratta di una superficie simmetrica rispetto ai piani cartesiani del sistema oxy , formata da infinite superfici laterali cilindriche di raggio $3/2$, tutte uguali tra loro ma non uguali alla superficie laterale cilindrica che si ha quando $k = 0$.

Per ogni valore di $k \neq 0$ avrò due superfici laterali cilindriche.

Segue la figura s_1 :



Esempio 2. L'esempio 2 è un caso particolare dell'esempio 1.

Il sistema del caso s_2 è quello del sistema del caso s_1 , quando però $k = 0, 2, 4, 6, \dots$

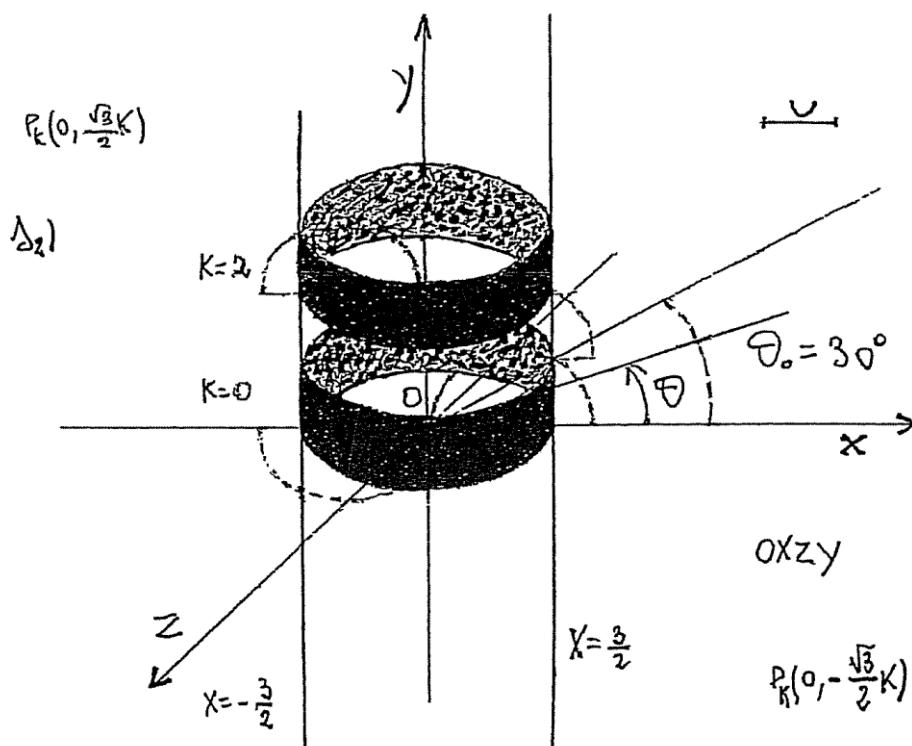
Il diagramma del sistema nello spazio $oxzy$ sarà quello rappresentato dalle infinite superfici laterali cilindriche di raggio $r = \frac{3}{2}$, separate una dall'altra e dette "anelli".

Il diagramma del sistema è stato limitato ai valori di

$$y = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k \begin{cases} \text{quando } k = 2 \text{ (un anello)} \\ \text{quando } k = 0 \text{ (1/2 anello)} \end{cases}$$

anche se gli anelli sono infiniti (uno sì e l'altro no).

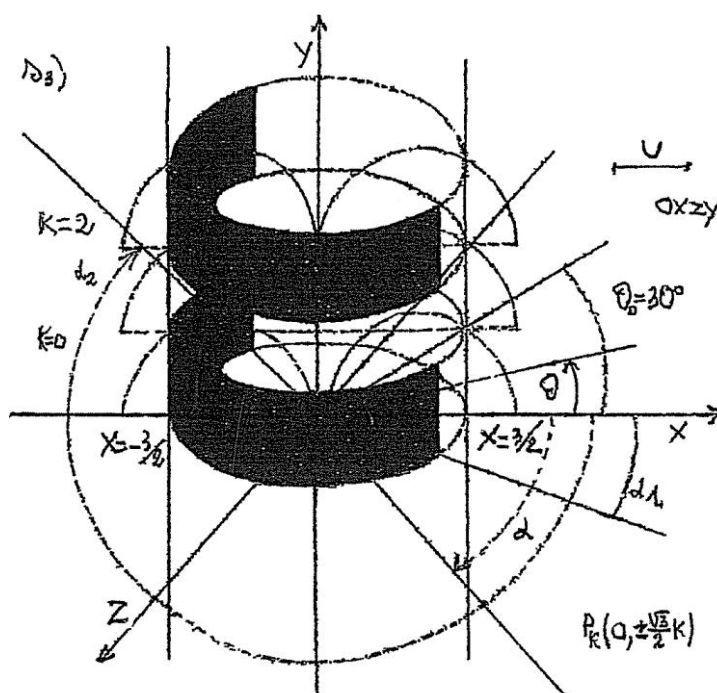
Il grafico è s_2 :



Ripreso il sistema dell'Esempio 1

$$\text{che posso scrivere anche così: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos \alpha & 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ \\ z = \frac{3}{2} \sin \alpha & 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k & k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

se lo considero quando $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ con $0^\circ \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 < 360^\circ$, $k = 0, 2, 4, 6, \dots$, avrò la seguente rappresentazione geometrica s_3 :



Come per l'Esempio 2, il diagramma è stato limitato ad un anello per $k = 2$ ed a $\frac{1}{2}$ anello per $k = 0$ anche se gli anelli sono infiniti (uno sì e l'altro no).

Riconsideriamo la curva dell'esempio 2. Sia A un arco dei $2N$ archi uguali ($N \geq 2$) in cui divido una qualunque circonferenza della s_2 ,

ossia $A = \frac{180^\circ}{N}$; se fisso gli estremi di questi archi:

$$\alpha_{2h} = 2h \frac{180^\circ}{N}; \quad \alpha_{2h+1} = (2h+1) \frac{180^\circ}{N} \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad N \geq 2$$

(tutti presi in senso orario e a partire dal piano $z = 0$) e se considero i valori di α dell'intervallo $\alpha_{2h} \leq \alpha \leq \alpha_{2h+1}$,

il sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos \alpha & k = 0, 2, 4, 6, \dots; \quad 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ \\ z = \frac{3}{2} \sin \alpha & 2h \frac{180^\circ}{N} \leq \alpha \leq (2h+1) \frac{180^\circ}{N} \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k & h = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad (N \geq 2) \end{cases}$$

rappresenta:

Per un valore di θ ed un valore di k ,

N archi dei $2N$ archi uguali (uno sì e l'altro no) in cui divido entrambe le circonferenze che sono la

intersezione della superficie cilindrica indefinita con due piani di equazione $|y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k$.

Per i valori di θ ed un valore di k ,

N superfici delle $2N$ superfici uguali (una sì e l'altra no) in cui divido un anello.

Per i valori di θ ed i valori di k ,

N superfici delle $2N$ superfici uguali (una sì e l'altra no) in cui divido tutti gli anelli.

Facciamo un esempio: se considero il sistema per $N = 4$ si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos \alpha \\ z = \frac{3}{2} \sin \alpha \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} k \end{cases}$$

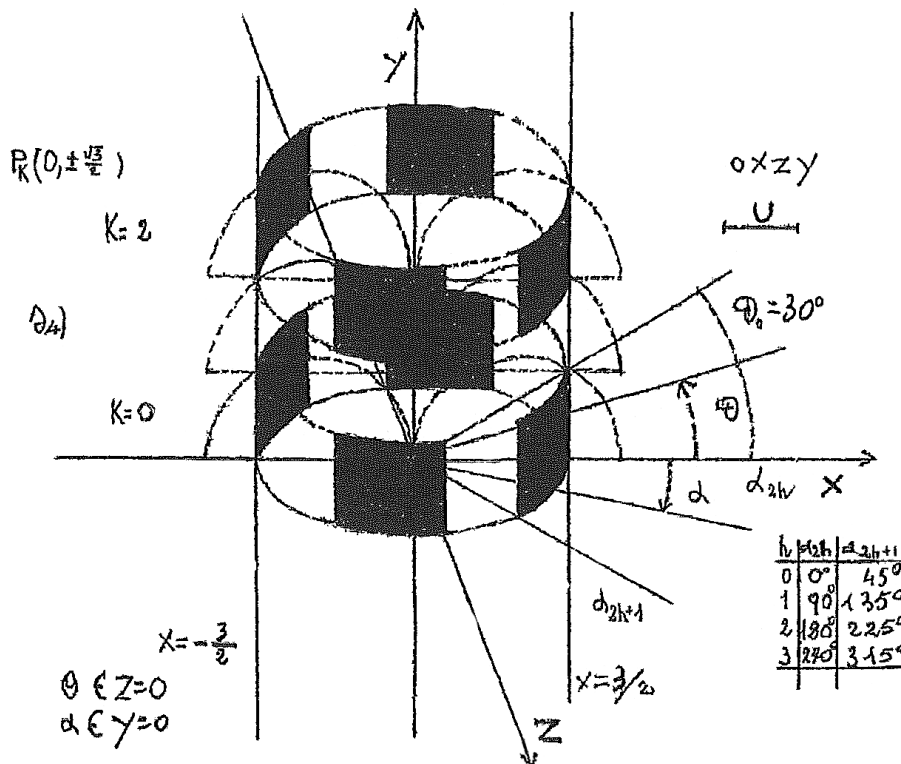
$$k = 0, 2, 4, 6, \dots$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$$

$$90^\circ h \leq \alpha \leq (2h+1)45^\circ$$

$$h = 0, 1, 2, 3.$$

e quindi la sua rappresentazione geometrica s₄:



Il diagramma è stato limitato a due gruppi di superfici, uno sulla superficie di un anello ($k = 2$) e l'altro su mezzo anello ($k = 0$) anche se i gruppi di superfici rappresentati dal sistema sono infiniti, uno per ogni anello.

Il piano di simmetria della superficie, rappresentata dal sistema, è $y = 0$.

A ripartire dalla famiglia dei segmenti paralleli all'asse delle y , rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} |y| = R \cos^n \theta_0 \tan \theta + bk \\ |x| = R \cos^n \theta_0 + ak \end{cases} \quad \begin{matrix} 0^\circ \leq \theta \leq \theta_0 < 90^\circ \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

se la riconsideriamo per i valori di:

$$\theta_0 = 30^\circ; \quad R = 2; \quad n = 2; \quad a = 1; \quad b = 3,$$

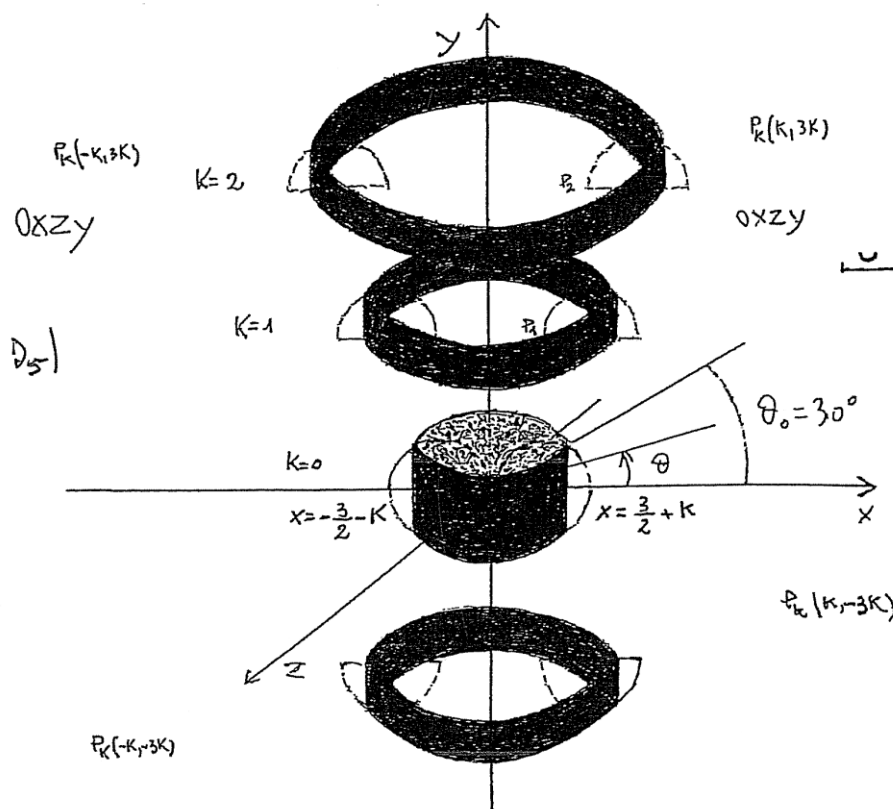
ritroverò il già noto sistema:

$$\begin{cases} |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + 3k \\ |x| = \frac{3}{2} + k \end{cases} \quad \begin{matrix} 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Se poi faccio ruotare questa famiglia di segmenti di $\frac{1}{2}$ giro attorno all'asse delle y , avrò infinite superfici laterali cilindriche (anelli), luogo geometrico dei punti dello spazio oxy le cui coordinate verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2} + k\right)^2 \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + 3k \end{cases} \quad \begin{matrix} 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Segue la figura s_5 :



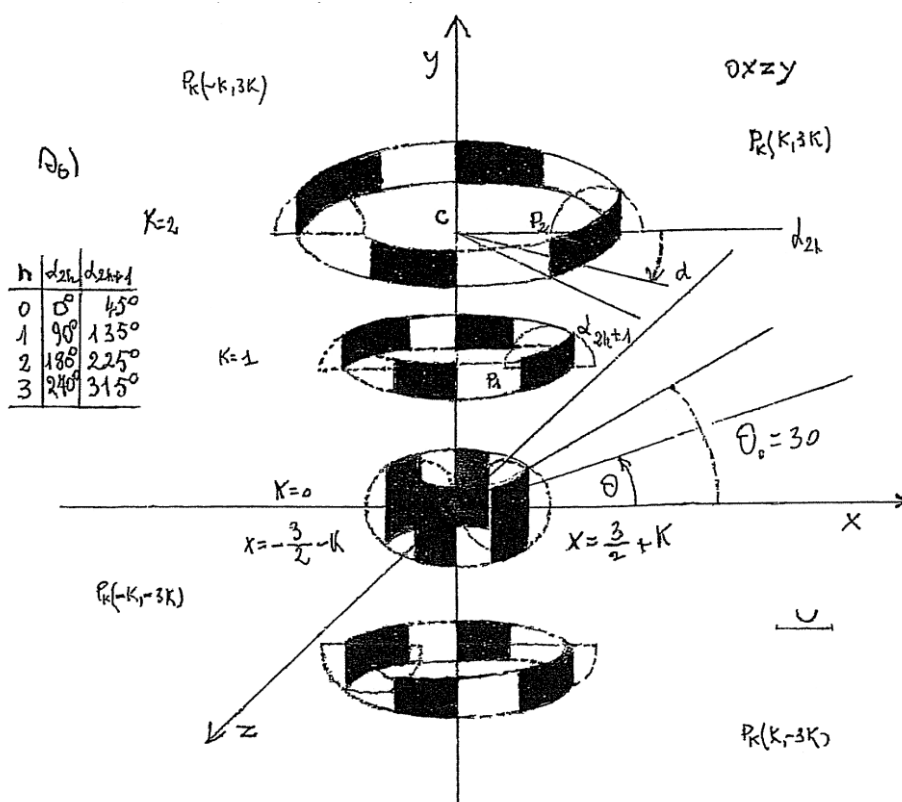
Scrivo il sistema della s_5 in quest'altro modo:

$$\begin{cases} x = \left(\frac{3}{2} + k\right) \cos \alpha \\ z = \left(\frac{3}{2} + k\right) \sin \alpha \\ |y| = \frac{3}{2} \tan \theta + 3k \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ \end{array}$$

Se poi lo considero quando $2h \frac{180^\circ}{N} \leq \alpha \leq (2h+1) \frac{180^\circ}{N}$ con $h = 0, 1, 2, 3$.

($N = 4$), il suo diagramma nello spazio sarà una superficie di rotazione di segmenti, formata da infiniti gruppi di superfici ($N = 4$), uno per ogni anello.

Vedere la figura s_6 .



Il sistema della s_6 potrà essere generalizzato come appresso:

$$\begin{cases} x = (R \cos^n \theta_0 + ak) \cos \alpha \\ z = (R \cos^n \theta_0 + ak) \sin \alpha \\ |y| = R \cos^n \theta_0 \tan \theta + bk \end{cases}$$

Con $0^\circ \leq \theta \leq \theta_0 < 90^\circ$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; $a \geq 0$, $b \geq 0$ (non contemporaneamente uguali a zero);
 $n \geq 1$ (intero); $R > 0$;

quando $2h \frac{180^\circ}{N} \leq \alpha \leq (2h+1) \frac{180^\circ}{N}$, $h = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, $(N \geq 2)$.

Il suo diagramma nello spazio sarà una superficie di rotazione di infiniti segmenti, formata da infiniti gruppi di superfici ($N \geq 2$), uno per ogni anello.

Sarà grazie ad una oculata scelta di valori dei parametri che il sistema, di conseguenza, potrà rappresentare nello spazio “superfici di rotazione di segmenti” piuttosto complesse e/o particolari.

170. Laboratorio di matematica: il teorema di Pitagora

Enrico Maranzana

Il ministro Francesco Profumo, in concerto con la fondazione Agnelli, ha individuato nella scuola media il punto più debole del sistema scolastico e ha espresso la volontà di riformarla: "*Quelli transitori sono i momenti più difficili ai quali fino ad oggi la scuola ha dedicato poca attenzione e sui quali lavoreremo con impegno*".

Quale sarà la direzione dei lavori? In questo scritto si vuole mostrare come all'origine del malessere della scuola secondaria di primo grado sia da collocare l'elusione delle disposizioni ministeriali: le scuole le hanno fraintese, ancorate a una logora concezione di disciplina. La progettazione dell'insegnamento del teorema di Pitagora mostrerà il cambiamento che la riforma del '79 avrebbe dovuto innescare.

Principi e fini generali della scuola media [D.M. 9 febbraio '79]

- Scuola della formazione dell'uomo e del cittadino
- Scuola che colloca nel mondo
- Scuola orientativa
- Scuola secondaria nell'ambito dell'istruzione obbligatoria

Il programma ministeriale si sviluppa per raffinamenti successivi e avrebbe dovuto orientare sia il lavoro collegiale, sia quello di classe.

Fasi della programmazione

- individuazione delle esigenze del contesto socio-culturale e delle situazioni di partenza degli alunni;
- definizione degli obiettivi finali, intermedi, immediati che riguardano l'area cognitiva, l'area non cognitiva e le loro interazioni;
- organizzazione delle attività e dei contenuti in relazione agli obiettivi stabiliti;
- individuazione dei metodi, materiali e sussidi adeguati;
- sistematica osservazione dei processi di apprendimento;
- processo valutativo essenziale finalizzato sia agli adeguati interventi culturali ed educativi sia alla costante verifica dell'azione didattica programmata;
- continue verifiche del processo didattico, che informino sui risultati raggiunti e servano da guida per gli interventi successivi.

Si prefigura un servizio scolastico unitario che evolve sequenzialmente: il problema educativo è collocato nel suo ambito originario, i traguardi da conseguire sono specificati, ipotesi d'intervento sono formulate: adempimenti che costituiscono il terreno di germinazione della progettazione dei docenti che, in esso, trova la propria vitalità.

Il programma contiene inoltre un aspetto sul quale oggi tanto si insiste: l'autogoverno; si realizza attraverso "*la sistematica osservazione dei percorsi d'apprendimento*" al fine di dirigere "*processi valutativi, essenziali*" "*alla costante verifica dell'azione didattica programmata*".

Quale dissonanza con l'abituale sentire e con l'ordinario agire! "Il gallo e la perla" di Fedro offre un'analogia calzante: lo spirito e la lettera del disposto ministeriale, non avendo trovato corrispondenza nelle aspettative degli operatori scolastici, sono stati sterilizzati.

Il significato di "*Lavoreremo con impegno*", alla luce di quanto premesso, merita d'essere chiarito: la piattaforma logico-culturale su cui sono edificati i programmi è da sostituire?

Non si condivide la prospettiva disciplinare che asserisce:

"Le discipline come educazione – Metodologie dell'apprendimento

Infatti, se correttamente interpretate, tutte le discipline curriculari - sia pure in forme diverse - promuovono nell'allievo comportamenti cognitivi, gli propongono la soluzione di problemi, gli chiedono di produrre risultati verificabili, esigono che l'organizzazione concettuale e la verifica degli apprendimenti siano consolidate mediante linguaggi appropriati.

Nella loro differenziata specificità le discipline sono, dunque, strumento e occasione per uno sviluppo unitario, ma articolato e ricco, di funzioni, conoscenze, capacità e orientamenti indispensabili alla maturazione di persone responsabili e in grado di compiere scelte. Si tratta del resto di soddisfare l'esigenza che il preadolescente manifesta, passando da esperienze di vita più globali e di cultura più indifferenziate, proprie della scuola primaria, a quelle più articolate e specifiche della scuola secondaria di primo grado, sulla linea della necessaria e appropriata pluralità delle discipline e dei contributi che esse forniscono.”

La domanda posta era oziosa: significativa, eloquente e vincolante la sovrapposibilità dell'impianto logico del programma con la finalità del sistema educativo, di istruzione e formazione:

legge 53/2003 Art 2

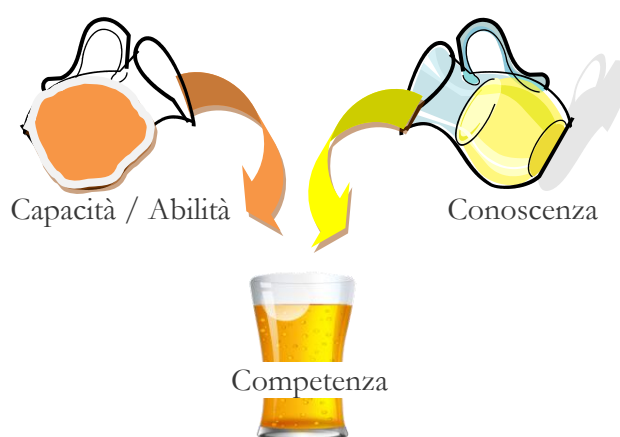
E' promosso l'apprendimento in tutto l'arco della vita e sono assicurate a tutti pari opportunità di raggiungere elevati livelli culturali e di sviluppare le capacità e le competenze, attraverso conoscenze e abilità, generali e specifiche, coerenti con le attitudini e le scelte personali, adeguate all'inserimento nella vita sociale e nel mondo del lavoro, anche con riguardo alle dimensioni locali, nazionale ed europea;

Ne discende che il “*Lavoreremo con impegno*” deve assumere la connotazione d'una dichiarazione d'intenti: individuare e rimuovere gli ostacoli che hanno impedito alla riforma del 1979 di produrre i suoi frutti, annientandola.

Una strada in salita: in questi giorni il fuoco è centrato sui libri di testo, riproposti sotto forma di tablets, canali TV ... senza badare alla loro natura: appartengono tutti alla classe “mezzi di comunicazione monodirezionali”, con valenza preminentemente informativa, tipici “strumenti”.

Che senso ha parlare di strumentazione didattica senza aver prima esplicitato, caso per caso, i traguardi formativi, educativi e dell'insegnamento¹?

Perché non si riflette sulla potenzialità innovativa del concetto “competenza” che è stato relegato alla sola di valutazione dei processi di apprendimento²?



La figura mette in risalto le componenti elementari delle competenze:

¹ In rete sono visibili degli scritti che affrontano le relative problematiche:

http://www.edscuola.it/archivio/ped/scuola_xxi_secolo.pdf

<http://www.edscuola.eu/wordpress/?p=9109>

http://www.edscuola.it/archivio/ped/scuola_imbalsamata.pdf

http://www.edscuola.eu/wordpress/?wpfb_dl=955

² <http://www.edscuola.eu/wordpress/?p=9278>

le capacità costituiscono lo spazio vitale della collegialità in quanto esprimono l'orientamento del sistema scolastico⁴;

la conoscenza, con le abilità, rappresentano le opportunità a disposizione dei singoli docenti per partecipare e per contribuire al successo del servizio.

Ecco riapparire la questione relativa al significato di "conoscenza": il contenuto dei volumi conservati nei santuari del sapere non costituisce più l'esclusivo riferimento del lavoro del docente. E' necessario dilatare l'immagine delle discipline, valorizzarne la dinamicità e gli elementi costitutivi.

Si tratta della strategia generativa del programma della scuola media che gli operatori scolastici, ancorata alla tradizionale immagine disciplinare, non hanno correttamente decodificato.

SCIENZE MATEMATICHE, CHIMICHE, FISICHE E NATURALI

[D.M. 9 febbraio 79]

Obiettivi

E' obbiettivo qualificante del processo educativo attraverso tali insegnamenti l'acquisizione da parte dell'alunno del metodo scientifico, quale metodo rigorosamente razionale di conoscenza che si concretizza nelle capacità concettuali e operative di:

esaminare situazioni, fatti e fenomeni;

riconoscere proprietà varianti e invarianti, analogie e differenze;

registrare, ordinare e correlare dati;

porsi problemi e prospettare soluzioni;

verificare se vi è rispondenza tra ipotesi formulate e risultati sperimentali;

inquadrare in un medesimo schema logico questioni diverse;

comprendere la terminologia scientifica corrente ed esprimersi in modo chiaro, rigoroso e sintetico;

usare ed elaborare linguaggi specifici della matematica e delle scienze sperimentali, il che fornisce anche un contributo alla formazione linguistica;

considerare criticamente affermazioni ed informazioni, per arrivare a convinzioni fondate e a decisioni consapevoli.

Ecco un esempio di come un docente di matematica avrebbe potuto onorare il mandato ricevuto.

L'attività di classe è scandita nelle seguenti fasi:

Distribuzione e commento della proposta di lavoro [Allegato 1];

Lavoro di gruppo (ogni gruppo, di 4/5 elementi, dispone di un adeguato numero di stecchi);

Esposizione alla classe delle produzioni – discussione – sintesi;

Sistematizzazione con l'utilizzo del proiettore [Allegato 2];

Distribuzione e utilizzo del materiale di rinforzo.

Allegato 1: la storia d'un triangolo

Per costruire una piramide con base quadrata gli egiziani, cinquemila anni fa, utilizzavano il cosiddetto metodo della corda, che restituiva degli angoli retti, di 90° .

Prendevano una corda lunga 12 unità, con nodi che la dividono in parti di 3,4,5 unità di lunghezza.



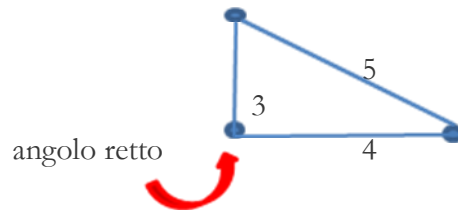
Nei due nodi infilavano un paletto e li conficcavano nel terreno, tendendo la corda:



Prendevano le estremità della corda e le tendevano, facendole combaciare.

Inserivano un paletto nel punto d'unione.

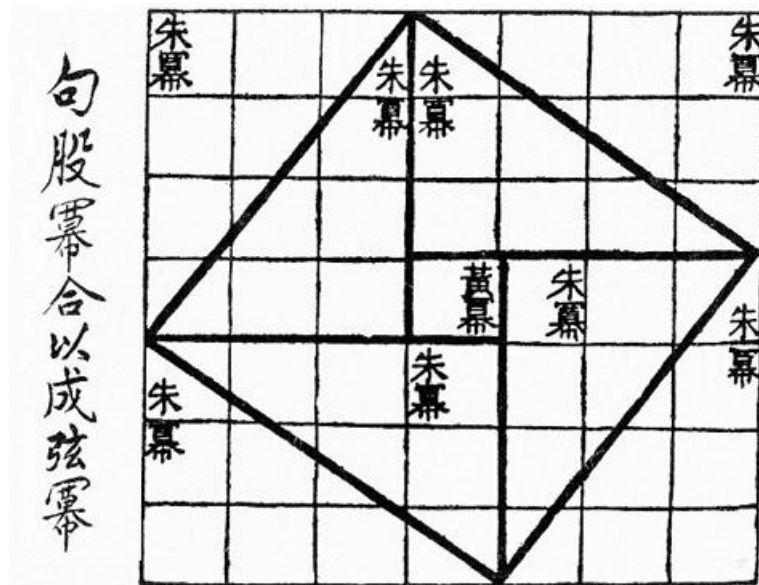
I tre paletti determinavano i vertici di un triangolo rettangolo.



Puoi controllare la validità della regola utilizzando 12 stuzzicadenti... 12 fiammiferi..

Anche i cinesi conoscevano e utilizzavano la stessa regola.

La seguente figura, che risale a più di tremila anni fa, enuncia la stessa regola e contiene la spiegazione del perché il metodo 3, 4, 5 funziona.



Su tavoletta di argilla babilonese, scritta nel 1800 a.c. sono incise terne di numeri che hanno le stesse proprietà di 3, 4, 5:



La prima colonna delle prime tre righe non è leggibile: la tavoletta è stata scheggiata.

Problema

Supponi che il contenuto della tavola babilonese, tradotto e scritto nel nostro sistema di numerazione decimale, sia

.....	4	5
.....	12	13
.....	24	25
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541

Come completare la tabella inserendo i numeri che sono andati perduti?
 Individuali e sostituisgili ai puntini.

Un consiglio, inizia la tua ricerca studiando la figura cinese per trovare le informazioni nascoste. Controlla se il lato lungo dei triangoli sia proprio di cinque quadratini; gli altri due, come vedi, misurano tre e quattro quadratini; l'angolo è di 90° .

Allegato 2



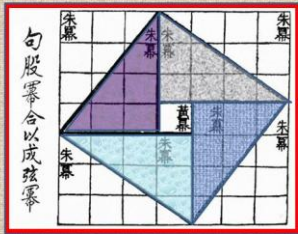
Riformulazione del problema:
 quanto devono misurare i tre lati di un triangolo affinché sia rettangolo?

Suggerimento:
 studia la figura cinese e trova le informazioni nascoste

Ci sono quattro rettangoli 3 x 4

Suggerimento:

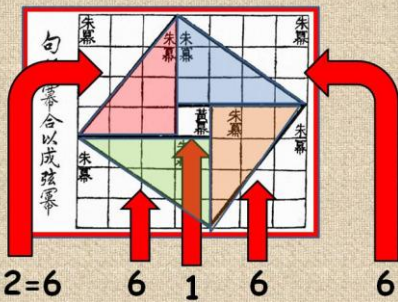
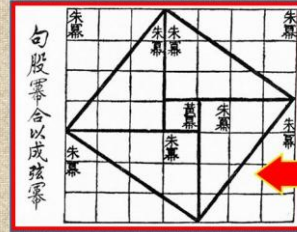
studia la figura cinese per trovare le informazioni nascoste. La tua attenzione deve essere guidata dallo scopo della ricerca: completare la tabella babilonese, individuando la misura dei tre lati dei triangoli rettangoli



Ci sono quattro triangoli uguali

Suggerimento:

studia la figura cinese per trovare le informazioni nascoste. Controlla se il lato lungo del triangolo sia proprio di cinque quadratini.

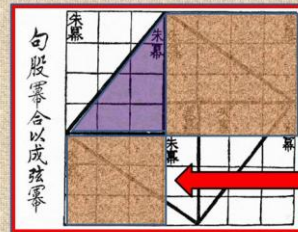


L'area del quadrato è 25 quadretti

Il lato misura 5 quadretti !!

Suggerimento:

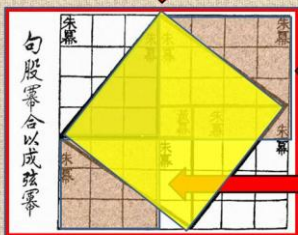
studia la figura cinese per trovare le informazioni nascoste.



Area di 16 quadretti

Area di 9 quadretti

Area di 25 quadretti



Area di 16 quadretti

Area di 9 quadretti

Cateto 1	Cateto 2	Ipotenusa
...	4	5
...	12	15
...	24	25
119	120	169
3367	3456	4825
4601	4800	6649
12709	13500	18541

$120^2 = 14.400$

$119^2 = 14.161$

$169^2 = 28.561$

$14.161 + 14.400 = 28.561$

validata!!

- Come completare la tabella inserendo i numeri che sono andati perduti?
- Individuali e sostituisgili ai puntini.

Cateto 1	Cateto 2	Ipotenusa
...	4	5
...	12	15
...	24	25

- Come completare la tabella inserendo i numeri che sono andati perduti?
- Individuali e sostituisgili ai puntini.

Lo sappiamo

Cateto 1	Cateto 2	Ipotenusa
3	4	5
9	12	15
7	24	25

$25^2 = 625$ $24^2 = 576$
 49

9 + 16 = 25 ?!



Abbiamo trovato l'informazione nascosta?

E' solo una coincidenza?

La tavoletta babilonese ci consentirà di rispondere alla domanda

Cateto 1	Cateto 2	Ipotenusa
...	4	5
...	12	15
...	24	25
119	120	169
3367	3456	4825
4601	4800	6649
12709	13500	18541

$3.456^2 = 11.943.936$
 $3.367^2 = 11.336.689$ $4.825^2 = 23.280.625$

11.336.689 + 11.943.936 = 23.280.625

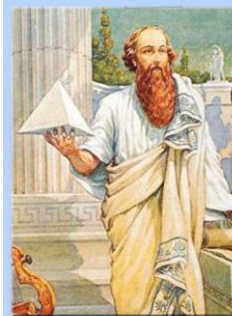
validata!!

- Come completare la tabella inserendo i numeri che sono andati perduti?
- Individuali e sostituisgili ai puntini.

Lo sappiamo

Cateto 1	Cateto 2	Ipotenusa
3	4	5
9	12	15
...	24	25

$15^2 = 225$ $12^2 = 144$
 81



Il greco Pitagora (575 a.c - 495 a.c.) ha generalizzato la relazione che sussiste tra i tre lati dei triangoli equilateri, enunciando il teorema:

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti.

171. Simmetrie e risoluzione di problemi di minimo e massimo per mezzo della geometria elementare

di Alfino Grasso

Introduzione

La simmetria bilaterale è presente nell'Universo sin dai primordi: particelle e antiparticelle, etc. Dopo circa 300.000 anni dal *Big Bang* emerse la luce la cui riflessione è strettamente legata alla simmetria. Questa è frequente nel campo microscopico e in quello macroscopico e nei mondi minerale, vegetale e animale, in quest'ultimo in particolare: ciò significa che nell'evoluzione e nella selezione naturale essa è risultata una strategia vincente.

Inoltre, la simmetria bilaterale (e quella centrale che da essa deriva) ha affascinato l'uomo sin dai suoi albori, come testimoniano i numerosi graffiti lasciati dai popoli primitivi in ogni dove, e come possiamo ammirare nelle creazioni artistiche delle diverse civiltà, da quelle egizie e babilonesi fino a oggi, diventando addirittura canone estetico.

Archimede, nell'*Equilibrio dei piani*, l'ha posta come assioma da cui ha dedotto le leggi della leva.

La simmetria, nel senso più generale di trasformazione che lascia invariata una figura rispetto a certe caratteristiche, costituiscono un formidabile strumento in fisica. Di particolare rilievo i gruppi di *simmetrie*, su cui si fondano la ricerca e lo studio delle *particelle elementari*, delle *forze fondamentali* e dell'*unificazione di queste*.

La poetessa Anna Wickham (1884-1947) in *The Contemplative Quarry*, così invoca la divinità:

«Oh Tu Signore, Somma Simmetria...
Dammi, o Signore, una cosa perfetta».

Dal 1932 sono stati pubblicati diversi testi (Birkhoff, Mac Lane, Papy, Bachmann, Choquet, Krygowska, Morin, Lombardo-Radice e Mancini Proia, Prodi, Lupo e altri) nei quali vengono presentati in forma didattica:

- Un'assiomatica (a volte sottintesa) intuitiva, semplice e forte.
Intuitiva: cioè che espone proprietà che si riferiscono all'esperienza comune.
Semplice: nel senso che si utilizza in modo naturale, diretto.
Forte: che consente accesso immediato anche a proprietà nascoste.
- L'uso delle trasformazioni, della simmetria in particolare, come metodo fondamentale di ricerca e dimostrazione delle proprietà.

L'importanza delle trasformazioni in genere, le simmetrie e le traslazioni e rotazioni (che di quelle sono "prodotto"), è evidenziata sia negli OBIETTIVI delle LINEE GENERALI e negli OBIETTIVI SPECIFICI DEL PRIMO BIENNIO dei Programmi ministeriali di Matematica.

Espongo ora una proposta didattica che presenta interessanti applicazioni della simmetria.

La riflessione della luce

Dopo questa introduzione, torniamo alla riflessione della luce che è fortemente legata alla *simmetria bilaterale*, detta per ciò anche *speculare*.

Nei millenni l'umanità ha sperimentato il fenomeno mediante le immagini di oggetti rispecchiati da una qualsiasi superficie riflettente, un corso d'acqua o uno stagno (*Narciso* di Caravaggio), un pezzo di vetro, una lamina di metallo ben lucidato, uno specchio.

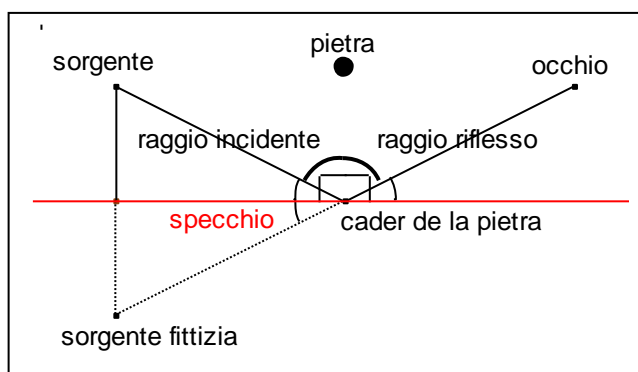
In qualunque direzione si guardi verso una superficie riflettente – uno specchio per esempio – si nota che è come se le immagini degli oggetti “provenissero” da dietro lo specchio in modo che:

- le distanze tra “punti” – per esempio la distanza delle immagini dei vostri occhi è la stessa di quella dei vostri occhi nella realtà;
- gli angoli formati dal gomito nell'immagine e nel vostro corpo, hanno la stessa ampiezza.

Di questa esperienza, comune e importante per l'uomo, è istruttivo presentare innanzitutto quella espressa in forma poetica nel canto XV del Purgatorio della *Commedia* di Dante.

*Come quando da l'acqua o da lo specchio
Salta lo raggio a l'opposita parte,
salendo su per lo modo parecchio
a quel che scende, e tanto si diparte
dal cader della pietra in igual tratta,
sì come mostra esperienza e arte;
così mi parve da luce rifratta
quivi dinanzi a me esser percosso;
per che a fuggir la mia vista fu ratta.*

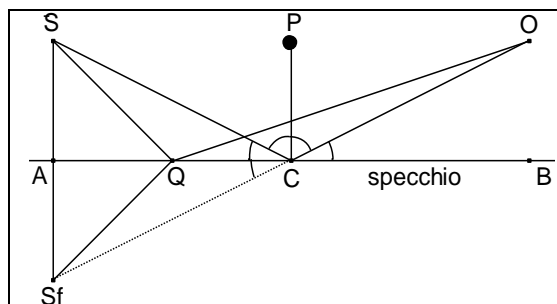
Come quando un raggio di luce (riflesso) dall'acqua o dallo specchio salta alla parte opposta, salendo con un angolo di riflessione pari a quello d'incidenza, e quanto dalla perpendicolare si scosta scendendo, altrettanto se ne allontana salendo, come dimostrano l'esperienza e l'arte (arte significa scienza); così mi sembrò di essere colpito in viso da una luce riflessa; per cui distolsi rapidamente lo sguardo.



I versi del Poeta descrivono il fenomeno della riflessione della luce non solo in modo poeticamente suggestivo ma anche scientificamente corretto, e danno della perpendicolare da un punto a una retta un'immagine di straordinaria efficacia intuitiva: “il cader de la pietra”.

Tutti abbiamo notato che è come se ci fosse dietro lo specchio una “*sorgente fittizia*”, tale che le distanze della “*sorgente fittizia*” e di quella reale dallo specchio sono uguali. Inoltre gli angoli formati dal raggio incidente e da quello “fittizio” con lo specchio hanno stessa ampiezza e quindi il percorso spezzato del raggio luminoso *sorgente-cader de la pietra- occhio*, si trasforma nel tragitto rettilineo “*sorgente fittizia*”- *cader de la pietra – occhio*, che è di uguale lunghezza del precedente.

Ciò consente di capire il comportamento della luce. Per renderlo più chiaro ci serviamo del grafico a fianco, in cui le lettere usate si riferiscono alla figura precedente, tranne il punto **Q** che sta sullo specchio ma è diverso da **C**. È come se la luce “annusasse” i percorsi e scegliesse quello più economico, più breve (“La Natura è economica” afferma Leonardo).



Chiariamo il significato del corsivo precedente. Se il raggio luminoso per andare da **S** a **O** si riflette in **Q**,

farebbe il tragitto $\overline{SQ} + \overline{QO}$ ma, per quanto sopra osservato, $\overline{SQ} = \overline{S_fQ}$ e quindi il cammino della luce sarebbe $\overline{S_fQ} + \overline{QO}$ che è maggiore del percorso rettilineo $\overline{S_fO} = \overline{SC} + \overline{CO}$, essendo quello rettilineo il tragitto più breve in forza della proprietà triangolare, che è “naturale”.

Possiamo affermare allora che la simmetria speculare ci permette di trasformare “un tragitto spezzato” in uno rettilineo di uguale lunghezza che è più facile confrontare con altri percorsi.

Tali considerazioni di carattere intuitivo vengono formalizzate dall’assioma di simmetria.

Data nel piano una retta a , diciamo simmetria di asse a , l’isometria tale che:

- tutti i punti di a sono uniti, (si dice pure che la retta a è luogo di punti uniti).
- ogni punto di uno dei semipiani aperti determinati da a si trasforma in un punto del semipiano aperto opposto.

Problemi risolvibili con le simmetrie

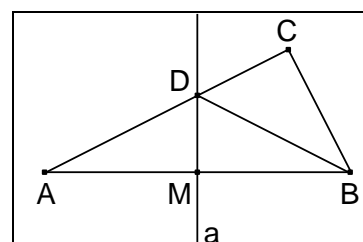
L’acquisizione di un metodo per la risoluzione di problemi è fondamentale in ogni attività umana. E la necessità di risolvere problemi di minimo e massimo ha dato uno straordinario impulso per l’invenzione del calcolo differenziale, mediante cui essi si possono risolvere.

La simmetria consente di affrontarne e risolverne di significativi mediante la geometria elementare. E’ opportuno quindi proporli sin dalle prime classi per stimolare l’interesse e la creatività dei giovani e permettere loro di costruirsi un modo corretto di ragionare le sollecitazioni che la risoluzione dei problemi propone.

Al fine di rendere più esauriente la comprensione delle argomentazioni successive è bene riprendere l’asse di simmetria di un segmento e proporre un’interessante rivisitazione in vista della risoluzione dei problemi presentati, che vanno inseriti in modo opportuno nel progetto didattico.

Sia **C** un punto di uno dei semipiani aperti determinati dall’asse a di un segmento **AB** di punto medio **M** (nella figura **C** sta nel semipiano individuato da **B** ma **C**, per la simmetria della costruzione, può appartenere nel semipiano opposto): $\overline{AC} > \overline{BC}$.

Infatti: il segmento **AC** interseca l’asse, in **D** (**A** e **C** appartengono a semipiani aperti opposti rispetto ad a), ed essendo **D** punto unito nella simmetria rispetto ad a , $\overline{AD} = \overline{BD}$; per la proprietà triangolare: $\overline{BC} < \overline{BD} + \overline{DC}$ quindi $\overline{BC} < \overline{AD} + \overline{DC}$, cioè $\overline{BC} < \overline{AC}$.



In conclusione: un punto appartenente a uno dei semipiani aperti determinati dall’asse di un segmento, ha distanza minore dall’estremo che sta nello stesso semipiano rispetto a quello che è nel semipiano opposto.

Osserviamo innanzitutto che è opportuno utilizzare, come suggeriscono le LINEE GENERALI, software dinamici poiché, prospettando questi più di una posizione degli oggetti geometrici in esame, aiutano i giovani a superare l’idea (errata) che il disegno fatto sul foglio sia dato una volta per tutte. Inoltre è didatticamente opportuno prospettare situazioni concrete che si possono matematizzare mediante schemi geometrici e coinvolgere i giovani nella realizzazione del procedimento, sia per renderli attori del loro apprendimento, sia perché in tale modo sono “costretti” a richiamare concetti appresi e a suggerire procedimenti per la soluzione.

Ricordiamo che nella geometria moderna le figure sono classificate mediante le loro simmetrie.

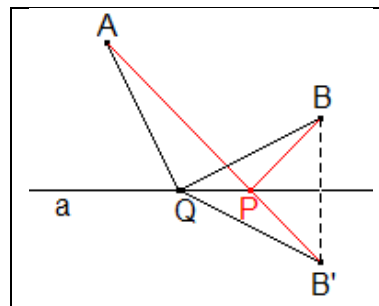
Problema 1

Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta.

Prerequisiti: simmetria assiale, proprietà di partizione, proprietà triangolare.

Si può presentare la situazione mediante il seguente problema tratto dal mondo reale.

In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di un'autostrada a . Si deve costruire un casello che serva due cittadine A e B , che sono dalla stessa parte rispetto a. In quale punto P di a deve essere realizzato il casello affinché la somma dei tragitti rettilinei $\overline{AP} + \overline{PB}$ sia la più breve, quindi la più economica?



Utilizziamo l'osservazione precedente e ricordiamo che la simmetria assiale è un'isometria e quindi conserva invariate lunghezze e ampiezze.

Consideriamo l'associato di A o di B - in figura B' di B - nella simmetria s_a di asse a ; tracciamo il segmento AB' , che interseca a nel punto P (A e B' stanno in semipiani opposti rispetto ad a) che è quindi unito in s_a ,

allora $\overline{PB'} = \overline{PB}$; da ciò $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AB'}$ e, per la transitiva dell'uguaglianza,

$$(*) \quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB'}$$

Scelto allora su a un qualunque punto Q diverso da P , confrontiamo $\overline{AQ} + \overline{QB}$, con $\overline{AP} + \overline{PB}$ cioè con $\overline{AB'}$ in virtù della (*). Poiché QB' è simmetrico di QB in s_a , $\overline{QB'} = \overline{QB}$ e di conseguenza $\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AQ} + \overline{QB'}$; ma, per la proprietà triangolare, $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'}$ e quindi dalla (*) segue infine $\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AQ} + \overline{QB}$.

Il percorso minimo da A a B , dovendo toccare a è determinato dal punto P intersezione dell'asse di a con il segmento AB' , con B' simmetrico di B rispetto ad a .

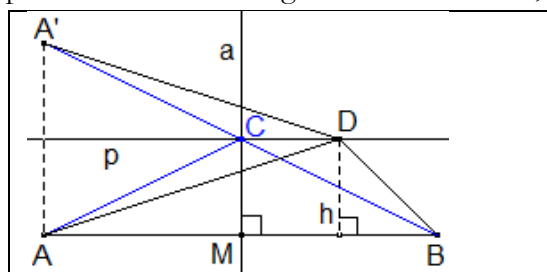
Questo problema è noto dall'antichità come problema di Erone (matematico alessandrino del I-II secolo d.C.). Esso, come abbiamo visto, descrive il comportamento della luce quando si riflette.

Problema 2

Fra i triangoli che hanno assegnati un lato e l'area A_s , trovare quello di perimetro minimo.

Scelto come base il lato - sia AB di misura b - è immediato ottenerne l'altezza relativa $h = A_s/b$.

Detto π_1 uno dei semipiani individuati dalla retta AB (figura), il terzo vertice D di uno dei nostri triangoli deve avere distanza h dalla retta AB , quindi varia sulla retta p di π_1 , parallela ad AB e a distanza h da questa. Dobbiamo trovare, al variare di D , il triangolo ABD di perimetro minimo. Osserviamo innanzitutto che la situazione è simmetrica rispetto all'asse a del segmento AB . Inoltre, detto C il punto comune ad a e p , se D si allontana da C , si "vede" che $\overline{AD} + \overline{DB}$, quindi il perimetro di ABD aumenta. Proviamo che C è il punto cercato.



Il problema ci richiama quello precedente. Usiamo allora la simmetria di asse p , s_p e costruiamo l'associato A' di A (o B' di B) in s_p : $\overline{A'C} = \overline{AC}$ per simmetria, quindi (*) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A'B}$; ma, per la proprietà triangolare,

$\overline{A'B} < \overline{A'D} + \overline{DB}$, qualunque D su p diverso da C . Ed essendo anche $\overline{A'D} = \overline{AD}$, perché lunghezze di segmenti anch'essi simmetrici rispetto a p , $\overline{A'B} < \overline{AD} + \overline{DB}$; dalla (*) si ha infine: $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AD} + \overline{DB}$.

Allora: Fra i triangoli che hanno un lato e l'area assegnati, ha perimetro minimo quello isoscele.

Nota. Quanto provato assicura che: se esistono in π_1 punti la somma delle cui distanze da **A** e **B** è uguale ad $\overline{AC} + \overline{CB}$, essi sono interni alla striscia di piano individuata dalle rette **p** e **AB**.

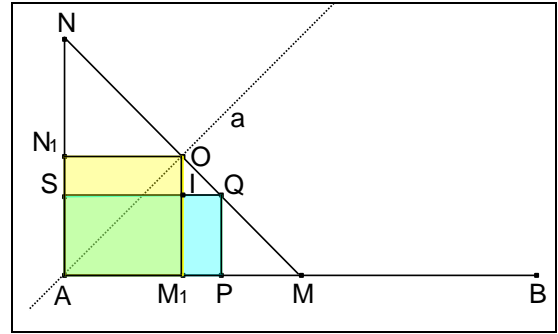
Problema 3

Determinare il rettangolo di superficie massima fra quelli di uguale perimetro.

Prerequisiti: punto medio, rettangolo, perimetro, triangolo isoscele, quadrato.

Osserviamo innanzitutto che il problema è simmetrico rispetto a due lati consecutivi, perché il perimetro di un rettangolo è il doppio della loro somma, nella quale sono quindi interscambiabili.

Detto **AB** un segmento che rappresenta il perimetro di un rettangolo (figura), basta allora considerare il segmento **AM**, con **M** punto medio di **AB** o, per la simmetria osservata, col segmento **AN** perpendicolare ad **AM** e a esso isometrico.



Il triangolo **AMN**, oltre che rettangolo, è isoscele sulla base **MN**, quindi ha un asse di simmetria a nella retta **AO**, con **O** punto medio di **MN**, in cui **M** ed **N** si corrispondono. Preso ora un punto **P** di **AM** (o di **AN**), costruiamo il rettangolo **R=APQS**, che ha per lati consecutivi **AP** e **PQ**, con **Q** intersezione di **MN** con la perpendicolare per **P** ad **AM** ed **S** su **AN**.

Al variare di **P** si modifica la superficie di **R**, che diminuisce se **P** si avvicina ad **A** o a **M**, mentre aumenta se **P** è prossimo al punto medio **M1** di **AM** e quindi se **Q** è vicino a **O** ed **S** a **N1** punto medio di **AN**. La simmetria della situazione suggerisce di confrontare la superficie di **APQS** con quella di **AM1ON1** che risulta un quadrato, poiché è un rettangolo con due lati consecutivi **AM1** e **AN1** isometrici perché simmetrici rispetto ad **a**.

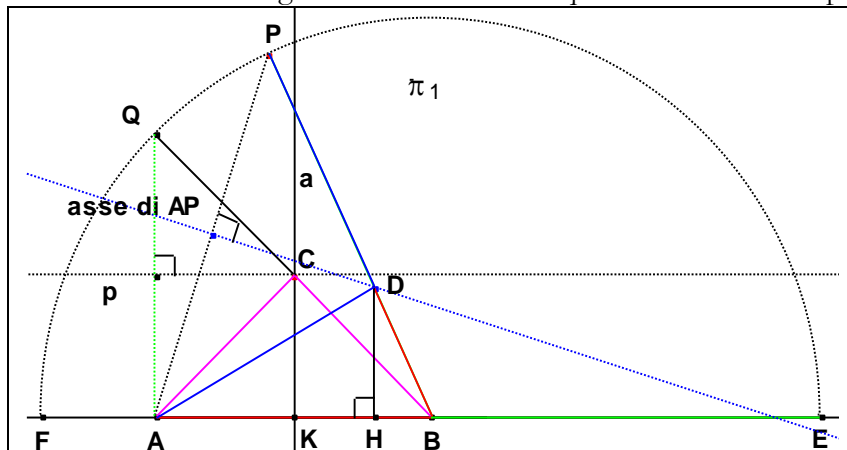
Se indichiamo ora con **I** l'intersezione di **SQ** con **OM1**, **R** e **AM1ON1** hanno in comune il rettangolo **AM1IS**: basta allora provare che **M1PQI** ha superficie minore di quella del rettangolo **SION1**. Infatti, il triangolo **OIQ**, è rettangolo in **I** e isoscele sulla base **OQ**, con **IO** e **IQ** isometrici, poiché per costruzione **OIQ** ha gli angoli ordinatamente isometrici ad **AMN**. Allora **AM1ON1** e **APQS** hanno basi isometriche **IQ** e **IO**; ed essendo **IM1 < ON1** e **ON1** isometrico con **OM1**, per le altezze si ha **IM1 < OM1**. Allora: Fra i rettangoli di uguale perimetro, quello di superficie massima è il quadrato.

Problema 4

Trovare il triangolo di area massima fra quelli che hanno un lato e il perimetro assegnati.

Prerequisiti: simmetria assiale, proprietà triangolare, altezza, perimetro e area di un triangolo.

Consideriamo un segmento **AE** uguale al perimetro di uno dei triangoli e sia **M** il suo punto medio. Sia poi **B** un punto interno al segmento **AM**; la proprietà triangolare assicura che esistono triangoli che hanno **AB** come lato e la cui somma degli altri lati è **BE > AB**: quindi soddisfano le ipotesi.



Per costruire uno dei triangoli dobbiamo determinare, in uno dei semipiani determinati da $\overline{AE} - \pi_1$ - il terzo vertice \mathbf{D} tale che $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AE}$. A tale scopo realizziamo in π_1 la semicirconferenza γ di raggio \overline{BE} e sia \mathbf{F} l'intersezione di γ con la retta \mathbf{AB} . Preso allora su γ un punto \mathbf{P} , dobbiamo trovare sul segmento \mathbf{BP} un punto \mathbf{D} equidistante da \mathbf{A} e \mathbf{P} . Il punto \mathbf{D} cercato è così l'intersezione di \mathbf{BP} con l'asse \mathbf{d} del segmento \mathbf{AP} : invero, $\overline{AD} = \overline{BP}$, quindi $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{PD} + \overline{DB} = \overline{BE}$. Al variare di \mathbf{P} su γ , cambia l'altezza \mathbf{DH} del triangolo \mathbf{ABD} relativa alla base \mathbf{AB} e s'intuisce che \mathbf{DH} cresce man mano che \mathbf{P} si allontana da \mathbf{E} ed \mathbf{F} e sembra massima se \mathbf{H} coincide col punto medio \mathbf{K} di \mathbf{AB} ; in tale caso $\mathbf{D} \equiv \mathbf{C}$ per cui $\overline{CA} = \overline{CB}$ e $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$ simmetrico di \mathbf{A} rispetto alla retta \mathbf{p} per \mathbf{C} parallela alla retta \mathbf{AB} .

L'osservazione successiva al problema 2 ci consente di provare quanto intuito. Per mezzo di essa, infatti, il punto \mathbf{D} in una posizione generica deve essere interno alla striscia di piano determinata dalle rette \mathbf{AB} e \mathbf{p} , allora l'altezza del nostro triangolo, quindi la sua area, è massima se \mathbf{ABD} coincide col triangolo isoscele \mathbf{ABC} .

Abbiamo dunque provato che: il triangolo di area massima fra quelli che hanno un lato e il perimetro assegnati è quello che possiede un asse di simmetria, cioè il triangolo isoscele.

Nota

La costruzione eseguita dà un procedimento semplice per realizzare un'ellisse dati i fuochi \mathbf{A} e \mathbf{B} , se si fa variare \mathbf{P} su una circonferenza di centro \mathbf{B} e raggio $r > \overline{AB}$.

172. Attraversamento di un fiume

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

Sunto

Questo articolo analizza i problemi di attraversamento di un fiume con una barca e una serie di vincoli, il cui caso più semplice è costituito dal notissimo indovinello del contadino con lupo, capra e cavolo. Si esamineranno i problemi di questa tipologia, indicando un procedimento utile per trovare una soluzione generale, indipendentemente dal numero di attori coinvolti e dai vincoli assegnati.

Introduzione

Chi non conosce l'indovinello del contadino che deve attraversare il fiume su una barchetta con un lupo, una capra e un cavolo evitando "banchetti" indesiderati?

Si tratta di un gioco talmente noto che non vale nemmeno la pena di spiegarlo nei dettagli. Esso è, però, soltanto la versione più semplice di una quantità di altri problemi molto simili tra loro, fatta salva l'identità dei protagonisti, che può variare di volta in volta.

Il caso più noto è certamente quello conosciuto come "Missionari e cannibali". Come nell'indovinello del contadino non possono stare su una stessa sponda lupo e capra o capra e cavolo, poiché uno mangerebbe l'altro (si suppone che il lupo non ami la dieta vegetariana e, dunque, disdegni il cavolo), nel nostro caso succede qualcosa di simile: se su una riva i cannibali sono in maggioranza, prendono il sopravvento sui missionari e li divorano.

Una variante sul tema, in realtà assai più antica rispetto a "Missionari e cannibali", è quella dei "Mariti gelosi"¹: N coppie sposate devono passare il fiume, ma nessuna donna può stare in compagnia di un uomo se il marito non è presente. In altre parole, su ogni sponda gli uomini non possono superare numericamente le donne (se così fosse, ce ne sarebbe almeno una senza marito), pertanto il quesito equivale nella sostanza a quello base.

Che si tratti di missionari o di persone gelose, l'altra importante condizione che deve essere definita riguarda il numero massimo di persone che la barca può trasportare. Si tratta di un elemento che - come si vedrà - influenza in maniera significativa le possibilità stessa di soluzione del problema.

Talvolta viene dato un ulteriore vincolo sul numero di coloro che sanno condurre la barca (è, implicitamente, il caso del contadino), oppure si prevede l'esistenza di un'isola intermedia tra le due rive del fiume. Per brevità, nel presente studio non saranno trattate tali situazioni.

Dunque, le variazioni sul tema sono numerose ed è lecito chiedersi se sia possibile, anziché risolvere singolarmente ogni caso, cercare un procedimento in grado di fornire una soluzione generale al problema.

Il grande divulgatore di matematica ricreativa Martin Gardner - tra gli innumerevoli argomenti di cui si è occupato - ha esaminato anche l'attraversamento del fiume, segnalando un procedimento che permette di affrontare la questione in modo da rendere piuttosto agevole la ricerca della/e soluzione/i. Nel prosieguo dell'articolo si cercherà di spiegare tale procedimento nella maniera più chiara possibile.

Una questione di grafi

Come spesso accade con gli indovinelli raccolti e riproposti da Martin Gardner, la chiave sta nel rappresentare i dati e i vincoli assegnati con uno schema opportuno, per poi utilizzare un procedimento preso da una delle tante branche della matematica.

¹ La prima comparsa del problema risale addirittura alle *Propositiones ad juvenes acuendos* opera attribuita ad Alcuino (morto nell'804); si parla di fratelli anziché di mariti, ma la situazione è del tutto analoga.

In questo caso, come si vedrà tra breve, ci viene in aiuto la teoria dei grafi.

Lasciando da parte l'indovinello del contadino, che è piuttosto banale, esaminiamo il caso in cui devono attraversare il fiume N missionari e N cannibali.

Partiamo considerando che su ogni sponda del fiume possono trovarsi da 0 a N attori per ciascuna tipologia: vi sono, dunque, $(N+1) \cdot (N+1)$ "stati" possibili.

A questo punto, bisogna eliminare quelli inaccettabili sulla base delle regole (in questo caso quelli in cui i cannibali sono in maggioranza su una delle due sponde) e verificare se sia possibile collegare gli stati accettabili in modo da passare dalla situazione " $N;N$ " (tutti sulla sponda di partenza) a quella " $0;0$ " (tutti sulla sponda opposta).

Più in particolare, il procedimento consiste in tre passaggi fondamentali:

- 1) Disegnare una matrice quadrata $N+1 \times N+1$ e marcare con un punto le caselle che rappresentano stati accettabili (non, ad esempio, $2;1$ o $2;3$).
- 2) Collegare i punti con linee che indichino tutte le possibili transizioni tra uno stato accettabile e un altro in base ai vincoli iniziali sul carico massimo della barca. Si ottiene così un primo grafo non orientato.
- 3) Aggiungere le frecce che indicano la direzione di ciascun passaggio da uno stato all'altro, in modo da arrivare al grafo orientato finale, costruito tenendo conto che il cammino deve osservare due regole:
 - partire dal punto $N;N$ (all'estrema destra in alto) e, attraverso una serie di passi successivi, terminare nel punto $0;0$ (a sinistra in basso).
 - alternare movimenti verso il basso e/o la sinistra con movimenti verso l'alto e/o la destra, il che rappresenta l'alternarsi dei viaggi dall'una all'altra sponda).

Un esempio pratico

Come esempio, si può provare ad applicare la procedura suddetta a un caso specifico: quello di tre missionari, tre cannibali e una barca che può portare non più di due passeggeri.

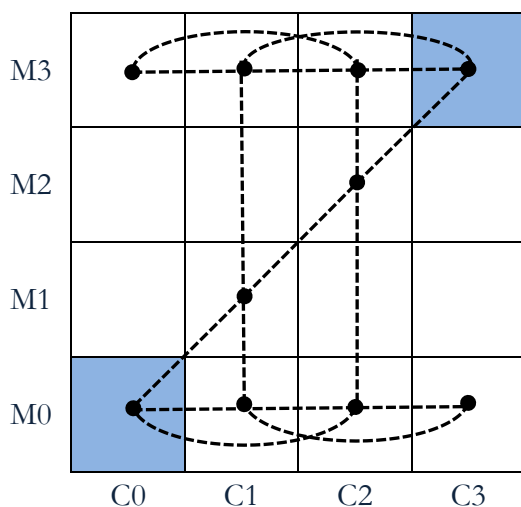
I missionari (M) sono rappresentati sull'asse verticale e i cannibali (C) su quello orizzontale.

Fase 1 - Indicare gli stati accettabili

M3	*	*	*	*
M2			*	
M1		*		
M0	*	*	*	*
	C0	C1	C2	C3

Ovviamente, gli stati accettabili sono quelli in cui tutti i M o tutti i C sono su un'unica sponda del fiume (rappresentati nella figura dalla prima e dall'ultima riga della matrice), oppure vi è un equilibrio numerico tra M e C su entrambe le sponde $(1;1)$ e $(2;2)$.

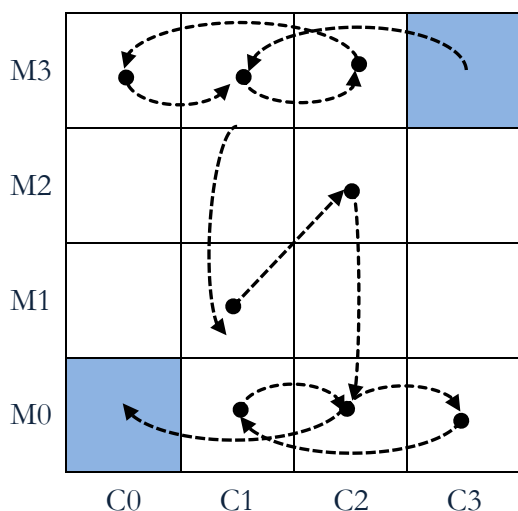
Fase 2 - Collegare gli stati



I collegamenti tra i punti che rappresentano gli stati accettabili tengono conto della possibilità che la barca porti una o due persone.

Dunque, è possibile fare uno o due passi in linea orizzontale o verticale (il che significa che sono presenti sulla barca uno o due persone dello stesso gruppo), ma solo uno in linea diagonale (equivalente al passaggio del fiume di un M e un C).

Fase 3 - Orientare le linee di connessione



In base alle regole date, facendo qualche tentativo non è troppo difficile trovare i cammini che risolvono il problema. Nella figura è raffigurata una tra le quattro soluzioni esistenti in 11 attraversamenti,² che costituisce il minimo possibile.

Per maggiore chiarezza, “traduciamo” la figura in azioni:

1. due C attraversano il fiume
2. un C torna indietro
3. due C attraversano il fiume (ora tutti i C sono sulla sponda d’arrivo)
4. un C torna indietro

² Ovviamente, dato che il primo e l’ultimo passaggio devono avvenire dalla sponda di partenza a quella di arrivo, il numero di viaggi necessario per attraversare il fiume è sempre dispari.

5. due M attraversano il fiume (ora c'è equilibrio su entrambe le sponde)
6. un M e un C tornano indietro
7. due M attraversano il fiume (ora tutti i M sono sulla sponda d'arrivo)
8. un C torna indietro
9. due C attraversano il fiume
10. un C torna indietro
11. due C attraversano il fiume

Come detto, ci sono quattro possibili soluzioni in 11 “mosse”; vale la pena di aggiungere che i passaggi dal terzo al nono sono sempre gli stessi, mentre possono cambiare i primi due e gli ultimi due.

In particolare, in due soluzioni su quattro il primo trasferimento coinvolge due C (come nell'esempio); nelle altre due soluzioni si comincia con il viaggio di un M e un C, seguito dal ritorno indietro di un M. Un'analogia doppia possibilità sussiste per quanto riguarda gli ultimi due attraversamenti.

Varianti al numero di attori e alla capacità della barca

Naturalmente, questa procedura permette di risolvere i quesiti di attraversamento purché il quesito stesso abbia delle soluzioni, il che non sempre è vero. Ad esempio, se si aggiungono un C e un M, lasciando inalterate le altre condizioni, non esiste alcun modo per attraversare il fiume senza che qualche malcapitato missionario finisca, prima o poi, tra le fauci dei cannibali.

Aggiungiamo che se la barca può portare quattro o un numero maggiore di passeggeri, il problema diventa banale: basta effettuare varie coppie di viaggi in cui all'andata traghettano due M e due C, poi tornano indietro un M e un C.

In tal modo, dopo ogni coppia di attraversamenti, vi sono un M e un C in meno sulla sponda di partenza e nel contempo viene sempre mantenuto l'equilibrio numerico su entrambe le sponde.³

Riprendendo la matrice quadrata vista in precedenza, ciò equivale a muoversi costantemente - avanti e indietro - lungo la diagonale principale che va da $(N;N)$ a $(0;0)$.

Altre modalità di soluzione

Il problema dell'attraversamento del fiume può essere affrontato anche in un altro modo, utilizzando un diagramma ad albero e una notazione vettoriale. Pur senza approfondire in dettaglio questo argomento, si ritiene utile dare una breve descrizione di questo procedimento.

Ogni stato viene identificato da una terna di valori che rappresentano rispettivamente:

- numero di M sulla sponda di partenza;
- numero di C sulla sponda di partenza;
- barca presente o meno sulla sponda di partenza (1/0).

Il valore iniziale è $(3,3,1)$ e le azioni sono rappresentate utilizzando alternativamente il vettore sottrazione e il vettore somma. Ad esempio, se come primo viaggio un C attraversa il fiume da solo, il vettore $(0,1,1)$ va sottratto dallo stato iniziale producendo $(3,2,0)$, che significa: 3 M e 2 C sulla sponda di partenza; barca sulla sponda opposta.

Per risolvere il problema, si costruisce un albero avente lo stato iniziale come radice; vengono poi sottratte le cinque azioni possibili - $(1,0,1)$, $(2,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,2,1)$ e $(1,1,1)$ - ottenendo altrettanti nodi figli della radice.

Ogni nodo che ha più C che M su una sponda rappresenta uno stato non valido e viene quindi rimosso. Dai nodi-figli validi - $(3,2,0)$, $(3,1,0)$ e $(2,2,0)$ - si generano altri figli, questa volta sommando i vettori relativi alle azioni possibili.

³ E' facile verificare che se la barca può portare non più di 4 persone, il trasferimento completo di N missionari e N cannibali secondo il procedimento descritto richiede $2N-3$ viaggi. Ad esempio, si può far attraversare il fiume a 6 missionari e 6 cannibali in 9 viaggi.

L' algoritmo continua alternando sottrazione e somma fino a quando viene generato un nodo con il vettore (0,0,0) come valore. Se ciò è possibile, il problema è risolto e il percorso dalla radice al nodo finale dà la sequenza dei passaggi necessari.

Nella figura viene schematizzata con un diagramma ad albero la soluzione del problema “Missionari e cannibali”.⁴

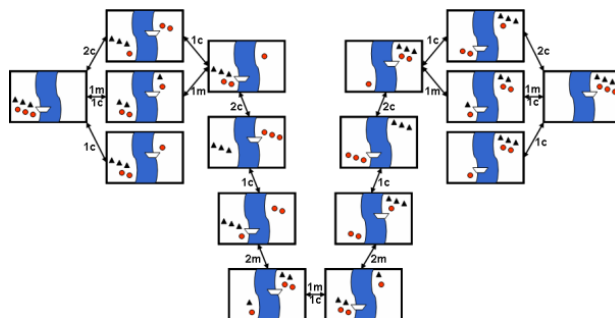


Figura tratta da: <http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html>

Questa rappresentazione è equivalente a quella basata sui grafi orientati: come si vede, in tutto si contano 11 passi e vi è una duplice possibilità di scelta in corrispondenza dei primi e degli ultimi due. Dunque, complessivamente esistono quattro possibili soluzioni al problema.

Bibliografia e sitografia

GARDNER M., *The last recreations*, Mathematical association of America.

GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (Vol. 1-5)*, Sansoni.

RUSSELL S.-NORVIG P., *Artificial intelligence: a modern approach*, Prentice Hall, 2nd edition.

AMAREL S., *On representations of problems of reasoning about actions*, in *Machine Intelligence*, Edinburgh University Press.

<http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html>

⁴ I pallini rossi identificano i cannibali; i triangoli neri i missionari.

173. Lo scaffale dei libri

“L'Universo dei numeri i numeri dell'Universo” di Felice Russo

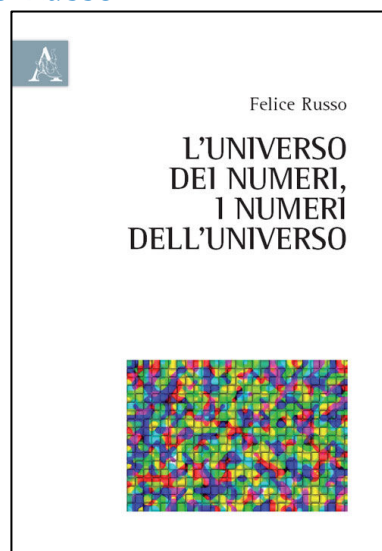
In 44 capitoli, Felice Russo ci “fa scoprire la magia della matematica” e “ci trasmette anche la gioia di pensare, immaginare e ragionare” (dalla presentazione di Viktor F. Zacek). Lo scopo del libro è quello di mostrarci come la matematica sia presente ovunque nell'universo. Ogni capitolo è un piccolo saggio, perciò chi legge il libro può scegliere un ordine personale, lasciandosi guidare unicamente dai propri gusti. Gli argomenti toccati sono i più vari e il libro è consigliato sia a chi dice che “la matematica non serve a nulla”, sia a chi ha già una passione per la materia.

L'autore comincia il suo viaggio nel mondo della matematica con i numeri primi, le cui proprietà hanno affascinato i matematici fin dall'antichità. I numeri primi sono gli “atomi del mondo matematico” e trovano applicazione non solo nel campo della crittografia, come dimostra l'algoritmo RSA, ma anche in natura, come per i cicli di vita di 13 e 17 anni di due diverse specie di cicale. Interessanti le curiosità che riguardano i numeri primi circolari e le piramidi di numeri primi palindromi, mentre una piramide particolare, il triangolo di Pascal, mostra una grande ricchezza di caratteristiche, dalla simmetria alla sequenza dei numeri triangolari, dai coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio ai numeri di Fibonacci. La matematica ha a che vedere anche con l'arte, come dimostrano i frattali e la polynomiography di Kalantari che ci permette, attraverso l'approssimazione delle soluzioni delle equazioni algebriche, di creare disegni.

I numeri di Fibonacci vengono ripresi in tutta la loro ricchezza, sia per le proprietà che li caratterizzano, sia per il loro legame con la sezione aurea, con la tassellatura di Penrose, con la legge di Benford e con la stella variabile UW Herculis. “I matematici sono conosciuti per la loro creatività e la loro abilità nel dare un senso a qualsiasi fenomeno naturale usando i numeri”: un superbo esempio di tale affermazione è offerto dalla teoria dei nodi, una branca della topologia che studia le curve chiuse intrecciate nello spazio a tre dimensioni, utilissima per capire come grandi molecole si intreccino una con l'altra. La matematica mostra la sua grande potenzialità anche nelle numerose applicazioni che oggi utilizziamo quotidianamente, come il motore di ricerca Google, inventato da due studenti dell'Università di Stanford che hanno sviluppato un algoritmo innovativo, oppure il GPS, che usa la teoria dei grafi per indicarci la strada più breve per raggiungere le nostre mete, oppure ancora il filtro che può diminuire l'incidenza dello spam, attraverso la formula di Bayes.

Grazie alla matematica, troviamo collegamenti anche tra ambiti apparentemente lontani: come il metabolismo e internet, con una architettura di rete simile, oppure tra internet e i terremoti, entrambi sistemi complessi ma non solo, visto che mappando gli eventi sismici tramite un grafo si è trovata una rete simile a quella di internet. Anche gli attacchi epilettici possono avere delle affinità con i terremoti e interessante è l'opportunità che ne scaturisce: “usare le leggi di un fenomeno per risolvere i misteri di un altro”.

Il libro si conclude con un'ultima incursione nel mondo della natura: dal volo degli insetti ai motivi della natura, che si ripropongono sia nelle strisce delle zebre che nel mondo auto-organizzato delle formiche, fino ad arrivare alla



superformula della natura, che ha permesso al botanico belga Johan Gielis, nel 2003, di descrivere molte figure geometriche presenti in natura, semplicemente variando alcuni parametri caratteristici.

Daniela Molinari

“La misura di tutte le cose. L’avventurosa storia dell’invenzione del sistema metrico decimale” di Ken Alder

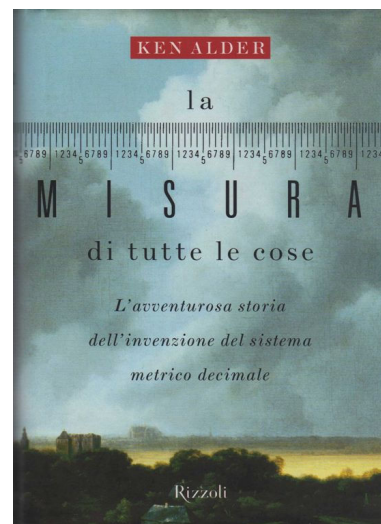
Nel giugno del 1792, due astronomi, Jean-Baptiste-Joseph Delambre e Pierre-François-André Méchain partono da Parigi per misurare l’arco di meridiano compreso tra Dunkerque e Barcellona: hanno il compito di effettuare queste misurazioni, per fissare una nuova unità di misura della lunghezza – il metro – che sarebbe stato un decimilionesimo della distanza tra il Polo Nord e l’Equatore. Nel manifestare gli intenti dell’Accademia delle Scienze francese, era stato dichiarato che il sistema metrico decimale era destinato “a tutti gli uomini e a tutti i tempi”, esattamente come la Terra che appartiene a tutti.

Nel XVIII secolo, le unità di misura erano molto numerose e questo costituiva un ostacolo per la comunicazione e il commercio, oltre a impedire un’onestà amministrazione dello stato. Si stimava che all’interno dell’Ancien Régime francese ci fossero duecentocinquanta diverse unità di peso e di misura: all’indomani di una Rivoluzione che aveva proclamato diritti universali per tutti gli uomini, era una situazione paradossale.

Delambre e Méchain viaggiarono lungo il meridiano per sette anni, dal 1792 al 1799. Durante la loro missione, vennero scambiati per spie e spesso rischiarono di morire per la rivoluzione in atto. L’operazione mostrava tutta la sua delicatezza, in proporzione alla violenza sempre più diffusa nella nazione. Durante la missione, Méchain, bloccato nei pressi di Barcellona per un infortunio, notò un’incongruenza nelle misurazioni, ma non riuscì a risolvere il problema e fu costretto a lasciare la città senza trovare una spiegazione, visto che nel frattempo Francia e Spagna erano entrate in guerra. Vista la sua propensione al perfezionismo, non poteva accettare un errore nelle sue misurazioni, ma temeva di confidarsi e quel peso interiore minò le sue energie fisiche.

Al termine della missione, i due astronomi decisero di convergere a Carcassonne, da dove tornarono a Parigi per presentare i propri dati a una Commissione internazionale. Dopo aver fatto di tutto per evitare di incontrarsi con Delambre e dopo aver ottenuto dall’Accademia di non presentare i suoi diari – la testimonianza del suo errore – Méchain, al termine dell’impresa e ossessionato dall’imperfezione, si fece assegnare una nuova missione, per estendere la misurazione del meridiano a sud di Barcellona. Approdato vicino a Valencia, sulle coste infestate dalla malaria, fu vittima dell’epidemia e morì il 20 settembre 1804.

Attualmente, solo Stati Uniti, Myanmar (ex Birmania) e Liberia non hanno riconosciuto come sistema di misura ufficiale il sistema metrico decimale, ma in anni recenti i produttori americani hanno dato inizio a una riconversione, una rivoluzione silenziosa e necessaria, viste le pressioni della nuova economia globale. Altri eventi premono per questa riconversione, basti ricordare che nel 1999 alla base della perdita del Mars Climate Orbiter c’era il lavoro di due squadre di ingegneri, che avevano usato due diverse unità di misura: tale



differenza generò un errore di traiettoria di 96,5 km e una perdita di 125 milioni di dollari.

Anche la Francia, nonostante sia stata la nazione che inventò il sistema metrico, lo respinse: la gente comune rifiutò con forza la nuova unità di misura, vedendo minacciati i propri guadagni e sentendosi ingannata. Alla vigilia dell'invasione della Russia, Napoleone dovette tornare alle antiche unità di misura e solo nel 1840 la Francia riuscì a riavere il metro.

L'errore commesso da Méchain era in qualche modo annunciato nella relazione ufficiale redatta da Delambre, la Base du système métrique décimal: "Non ho rivelato al pubblico ciò che non è obbligato a sapere. Ho eliminato tutti quei dettagli che potrebbero ridurre la sua fiducia in una missione così importante, per la quale non ci sarà data occasione di fare una verifica." Ma in una scatola di cartone accuratamente sigillata, l'autore ha trovato dozzine di lettere, nelle quali è raccontato l'errore. Secondo gli odierni rilevamenti satellitari, il metro elaborato da Delambre e Méchain è più corto di circa 0,2 mm, perché la lunghezza del meridiano equivale a 10.002.290 metri. Eppure, come ci dice lo stesso autore, "persino nel fallimento, Delambre e Méchain ebbero successo, poiché attraverso il loro lavoro, non soltanto rielaborarono la nostra conoscenza della forma della Terra, ma anche la nostra conoscenza dell'errore".

Daniela Molinari

"I dieci esperimenti più belli – Da Galileo a Millikan" di George Johnson

È un libro gradevole anche per chi non ha una preparazione in materia: l'autore spiega con estrema chiarezza sia i dieci esperimenti sia il contesto nel quale sono stati concepiti. Gli ideatori degli esperimenti sono descritti nelle loro ambizioni, nella loro genialità, nei punti di forza e nelle debolezze, anche se non ci sono biografie particolareggiate. Il libro può considerarsi un invito all'approfondimento, che può essere guidato dalla nutrita bibliografia fornita dall'autore.

La scienza che emerge da questo libro ha un carattere individuale, a differenza degli esperimenti del XXI secolo che generano una quantità tale di dati, che per processarli ed analizzarli sono necessari supercomputer ed équipe composte da parecchi scienziati.

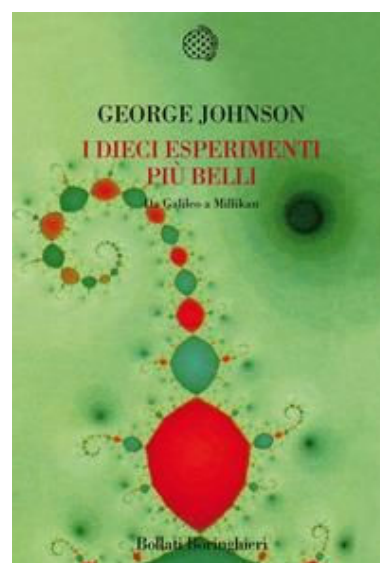
George Johnson ci presenta solo dieci esperimenti, quelli che, in un certo senso, hanno costituito il fondamento della scienza.

1. Galileo: il vero moto degli oggetti – La trovata geniale di Galileo per studiare la caduta di un grave, senza avere a disposizione strumenti sofisticati.

2. William Harvey: i misteri del cuore – Per risolvere il mistero del funzionamento del cuore e riuscire a stabilire il movimento circolatorio del sangue, estrasse il cuore di un animale ancora in vita.

3. Isaac Newton: che cos'è un colore – Facendo passare un raggio di luce attraverso un prisma e proiettandone lo spettro su una tavola di legno, Newton scoprì cos'era il colore.

4. Antoine-Laurent Lavoisier: la figlia del fattore – Bruciando mercurio, capì che la combustione consuma ossigeno e riuscì a separare ossigeno e azoto. Stabilì anche la legge di conservazione della massa.



5. Luigi Galvani: elettricità animale – La disputa tra Galvani e Volta sull'esistenza dell'elettricità animale obbligò lo stesso Galvani a perfezionare il proprio esperimento, in modo da eliminare qualsiasi influenza esterna.

6. Michael Faraday: qualche cosa di profondamente nascosto – Faraday trova il collegamento tra l'elettricità e il magnetismo con un esperimento nel quale il campo magnetico fa ruotare un fascio di luce.

7. James Joule: lavoro e calore – Joule dimostrò l'equivalenza di calore e lavoro con un celeberrimo esperimento: lasciando cadere un peso, innalzò la temperatura dell'acqua.

8. Albert A. Michelson: persi nello spazio – La storia di un famoso esperimento, che dimostrò il contrario di quanto ci si aspettava e per questo motivo, la sua interpretazione fu difficile: non ci si aspettava che l'etere non esistesse.

9. Ivan Pavlov: misurare l'immisurabile – Conducendo esperimenti sugli animali, arrivò a importanti conclusioni sulla fisiologia della digestione, meritando il premio Nobel nel 1904.

10. Robert Millikan: nella terra di confine – Millikan misurò la carica dell'elettrone, osservando delle goccioline d'olio elettrizzate. L'esperimento non è così semplice come appare, come riconosce lo stesso autore, avendolo provato più volte.

Daniela Molinari

“I pantaloni di Pitagora – Dio, le donne e la matematica” di Margaret Wertheim

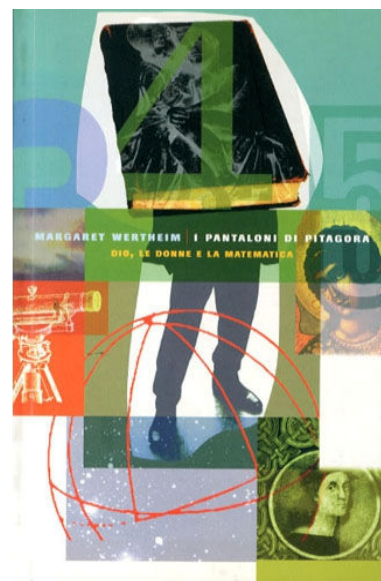
A partire da Galilei fino ad oggi, studiare la fisica ha significato cercare le relazioni matematiche dell'universo, ma esprimere materia, spazio e tempo in termini meramente matematici non ha chiuso le porte alla religione: “scienza moderna e cristianesimo sono in fondo tentativi diversi di situare l'umanità in un più ampio quadro cosmico”. L'intento dell'autrice non è solo di valutare il legame tra scienza e religione, ovvero di “tracciare la storia dell'Uomo Matematico in quanto essere religioso”, ma di valutare anche la posizione della donna in ambito scientifico: traccia l'evoluzione della fisica, sottolineando che “tracciare l'ascesa dell'Uomo Matematico significa ripercorrere in parallelo la battaglia affrontata dalla Donna Matematica”.

Gli Ionici furono i primi a tentare di spiegare i fenomeni naturali senza ricorrere a divinità: tra di essi, Pitagora di Samo vedeva l'essenza della realtà nei numeri.

La scuola aperta a Crotone era sostanzialmente una scuola mistica e Pitagora costituiva una guida spirituale.

Nel Medioevo, la rinascita della matematica e della scienza greca segna il “definitivo allontanamento delle donne dal sapere”: con la riforma del clero alla fine dell'VIII secolo, le donne vennero relegate nei loro conventi e allontanate dai centri del sapere, dominio esclusivamente maschile.

All'inizio del XVII secolo, in ambito accademico non c'erano regole formali che impedissero l'accesso delle donne ma le prime astronome furono essenzialmente osservatrici e si videro negare ogni riconoscimento ufficiale. Nello stesso periodo, scienziati e maghi erano rivali: la vittoria sulla scienza fu favorita dal Concilio di Trento che adottò una linea dura contro la magia, mettendo all'Indice i suoi testi. In ambito scientifico, per combattere la magia,



prevalse l'applicazione della matematica allo studio della natura, il cui più grande sostenitore fu Cartesio, secondo il quale la logica era la base della vera conoscenza.

Il primo emblematico scontro tra scienza e fede è quello con Galilei: lo scontro fu una lotta “per il diritto a descrivere i Cieli”.

Newton cercò invece di condividere il potere epistemologico in gioco con i rappresentanti della Chiesa: egli riteneva la sua opera scientifica una ricerca di Dio e con la formulazione matematica della legge di gravitazione universale, “la competenza sui Cieli passava dai teologi ai fisici”.

In Inghilterra continuavano a permanere le stesse usanze per quanto riguarda le differenze tra i sessi: la Royal Society continuò a rifiutare qualsiasi candidatura femminile mentre un piccolo numero di donne fu ammesso all'Accademia delle Scienze di Berlino.

L'eccezione delle vicende di Laura Bassi e Maria Gaetana Agnesi evidenzia “le limitazioni imposte alle donne che intraprendevano la carriera scientifica nel XVIII secolo”. Solo dopo il 1870 molte università statali cominciarono ad accettare le ragazze e ci si orientò verso una scuola mista.

Maria Sklodowska Curie, prima persona al mondo a vincere due Nobel per la scienza, è la dimostrazione di “ciò che avrebbero potuto fare le donne nella scienza se in maggior numero avessero avuto la possibilità di parteciparvi”. La sua vita è straordinaria non solo per i risultati che ha conseguito, ma anche per le difficoltà che ha dovuto affrontare e superare: insignita del premio Nobel per la fisica nel 1903, alla morte del marito, si trovò ad affrontare terribili insidie nel mondo scientifico, visto che “era da molti considerata solo la moglie di Pierre”.

Per avere un'idea della condizione delle donne in Europa prima della seconda guerra mondiale, bisogna considerare Emmy Noether e Lise Meitner: la prima è uno dei più grandi matematici del secolo e sviluppò concetti matematici fondamentali per la fisica delle particelle e per l'attuale ricerca di una sintesi tra relatività generale e meccanica quantistica. Purtroppo perse anni preziosi, in quanto donna e non le fu dato uno stipendio adeguato nemmeno quando l'università le concesse finalmente un posto.

Lise Meitner dedicò la sua vita alla fisica. Collaborò con Otto Hahn ad una serie di esperimenti sulla radioattività, ma quando, salito al potere Hitler, riparò in Svezia, nonostante la quotidiana collaborazione con Hahn, fu esclusa dall'assegnazione del premio Nobel per la chimica nel 1944.

“Nel secolo contemporaneo, le donne hanno dovuto, e devono tuttora, combattere per conquistarsi un posto all'interno della comunità dei fisici”. Non è più consentita una discriminazione palese come quella dei secoli scorsi, ma ne esiste ancora una forma strisciante negli ambienti scientifici. La vicenda di Chien-Shiung Wu è emblematica: brillante scienziata delle particelle, nel 1957 verificò sperimentalmente quanto ipotizzato da Lee e Yang, ma solo questi ricevettero il premio Nobel per la fisica.

Nonostante i notevoli miglioramenti degli anni Settanta, la fisica continua a restare un dominio prepotentemente maschile: dall'aggiornamento alla pubblicazione degli articoli, alle possibilità di trovare lavoro, le donne sono sempre svantaggiate e “mediamente ci mettono parecchi anni più dei colleghi maschi per raggiungere certe posizioni”.

Daniela Molinari

“La grande invenzione di Bubal” di Anna Cerasoli

Come nascono i numeri nella preistoria: una fiaba per bambini per capire gli aspetti più significativi del contare con i simboli. Bubal è una bambina 'preistorica', il suo papà le affida il difficile compito di accudire il loro gregge, mentre papà e fratello maggiore sono fuori per una battuta di caccia e la mamma è sempre alle prese con sorelle e fratelli più piccoli. Il compito si rivela per Bubal molto più impegnativo del previsto, perché non riesce a ricordare e distinguere tutte le pecore: come farà ad essere certa che tutte le pecore rientrano nel recinto al sicuro?

Finché le pecore sono nel recinto il compito è semplice ma quando l'erba del recinto comincia a scarseggiare mentre tutto intorno fuori dallo steccato l'erba cresce rigogliosa cominciano a sorgere i problemi: se lasciasse le pecore uscire dal recinto come avrebbe fatto a sapere che sarebbero poi tutte rientrate? Per risolvere questo problema Bubal escogita una serie di strategie.

Assegnare un nome a ciascuna pecora e ricordare di ognuna di esse qualche caratteristica che potesse distinguerla dalle altre? Ricciolo, Barbetta, Grassocella, Magretta, Bianchissima... impossibile ricordarle tutte!

Farle uscire a una per volta e aspettare che rientrasse la prima per far uscire la seconda? Troppo lungo!

Farle uscire a due alla volta? Oppure a tre alla volta? Forse era meglio farle uscire cinque alla volta, in modo che fossero tante quante le dita di una mano. Così fece: "Aveva inventato il primo contatore della storia. Anzi, se lo era trovato proprio lì a portata di mano!"

Ma questa è solo la prima di tante idee che ebbe Bubal e che la portarono a contare con i simboli e scriverli.



Antonio Bernardo

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 6 Numero 17 APRILE 2012

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it