169. Segmenti paralleli

Bruno Sanchini
brunosanchini@yahoo.it

Sunto

Si utilizza il sistema: $\begin{cases} |y| = \tan\theta\,|x| + k(b - a\tan\theta) \\ (ak)^2 \le x^2 \le (R\cos^n\theta + ak)^2 \end{cases}$ di una grande famiglia di superfici.
Lo scopo di questo studio è la ricerca di segmenti paralleli nel piano e nello spazio.

Using the system: $\begin{cases} |y| = \tan\theta\,|x| + k(b - a\tan\theta) \\ (ak)^2 \le x^2 \le (R\cos^n\theta + ak)^2 \end{cases}$ of a great family of surfaces.
The aim of this study is to research parallel segments on a plane and in space.

Introduzione

Per la ricerca, sarà opportuno descrivere il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \tan\theta\,|x| + k(b - a\tan\theta) \\ (ak)^2 \le x^2 \le (R\cos^n\theta + ak)^2 \end{cases} \qquad (1)$$

introdotto nel sunto, con $0° \le \theta < 90°$; $k = 0,1,2,3,\ldots$; $n \ge 1$ (intero); $R > 0$; $a \ge 0,\ b \ge 0$ (non contemporaneamente uguali a zero);
$P_k(ak, bk)$, che nel piano cartesiano ortogonale oxy rappresenta una superficie, formata da infiniti segmenti uscenti "a raggiera" dal punto P_k per formare con l'asse delle x degli angoli θ con $0° \le \theta < 90°$; simmetrica rispetto agli assi cartesiani ortogonali oxy.
Se $n = 1$ il sistema rappresenta infiniti settori circolari.
Se $n = 2$ il sistema rappresenta infiniti semicerchi.
Superfici diverse si avranno quando $n > 2$.
Per ragioni di spazio mi limiterò a considerare sistemi e figure solo quando $n = 2$.

Segmenti paralleli nel piano

A partire dal sistema precedente (1), se della doppia disuguaglianza dei valori di x, considero i valori di $|x| = R\cos^n\theta + ak$ quando $\theta = \theta_0$, con $\theta_0 > 0°$ e $\theta_0 < 90°$, avrò $|x| = R\cos^n\theta_0 + ak$; e a seguire: se sull'equazione a 2 incognite x e y del sistema sostituisco $|x|$ con $|x| = R\cos^n\theta_0 + ak$, avrò:
$|y| = R\cos^n\theta_0\tan\theta + bk$

perciò, il sistema: $\begin{cases} |y| = R\cos^n\theta_0\tan\theta + bk \\ |x| = R\cos^n\theta_0 + ak \end{cases}$ che, con

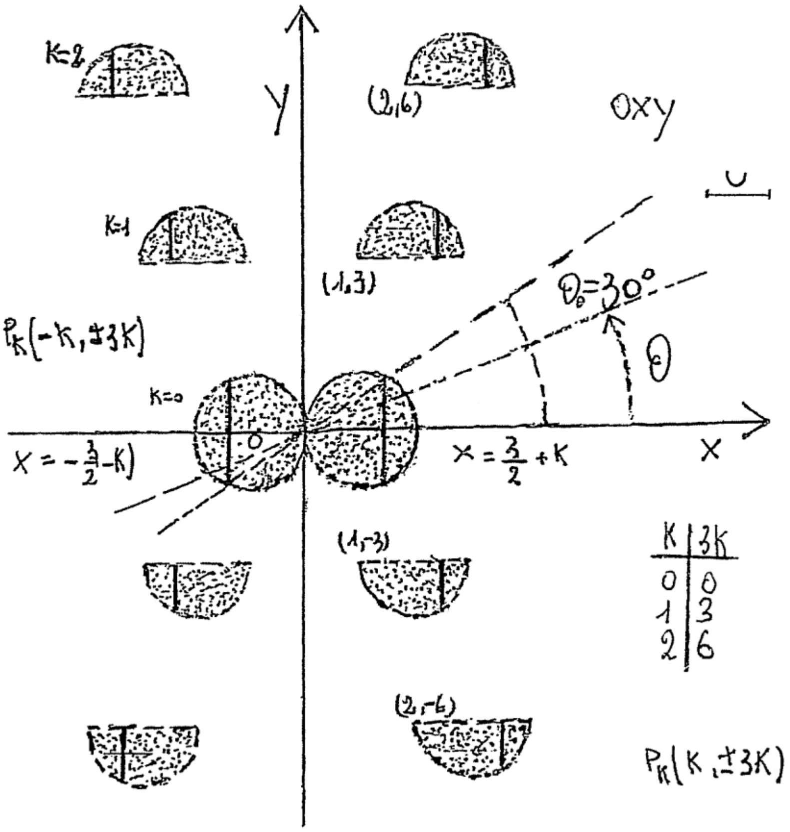
$0° \le \theta \le \theta_0 < 90°$; $k = 0,1,2,3,\ldots$; $n \ge 1$ (intero); $R > 0$; $a \ge 0,\ b \ge 0$ (non contemporaneamente uguali a zero);
$P_k(ak, bk)$, rappresenterà nel piano oxy una curva simmetrica rispetto agli assi, formata da infiniti segmenti uguali, però non uguali ai due segmenti uguali che si hanno quando $k = 0$; comunque, tutti paralleli tra di loro. Per ogni valore di $k \ne 0$ si hanno 2 coppie di segmenti.

Seguono alcuni esempi.

Esempio 1. Con $\theta_0 = 30°$; $n = 2$; $R = 2$; $a = 1$; $b = 3$ il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \dfrac{3}{2}\tan\theta + 3k \\ |x| = \dfrac{3}{2} + k \end{cases} \qquad 0° \le \theta \le 30°;\quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

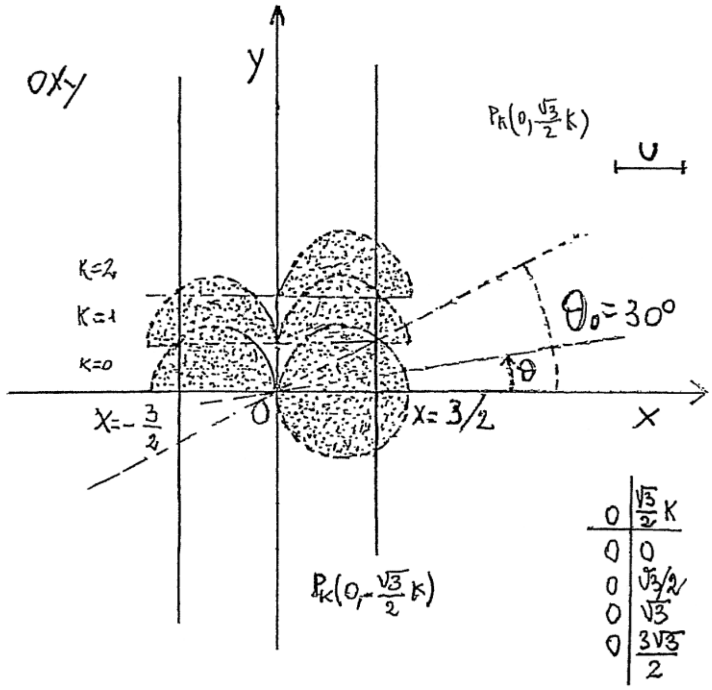
e, quindi la curva:



Esempio 2. Con $\theta_0 = 30°$; $n = 2$; $R = 2$; $a = 0$; $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ il sistema:

$$\begin{cases} |y| = \dfrac{3}{2}\tan\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}k \\ |x| = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad 0° \le \theta \le 30°;\quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

e, quindi la curva:



È una curva costituita da due rette parallele, simmetrica rispetto agli assi cartesiani, di equazione $|x| = 3/2$.

Tali rette sono formate da infiniti segmenti uguali che si hanno per $k = 0,1,2,3,\dots$ (qui, anche per $k = 0$, considero due coppie di segmenti). Le due rette si dicono: **rette modulari**.

Rotazione di segmenti nello spazio

Riconsiderata la famiglia dei segmenti paralleli, se nello spazio cartesiano ortogonale $oxzy$ li faccio ruotare di $1/2$ giro attorno all'asse delle y, avrò una superficie rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \left(R\cos^n\theta_0 + ak\right)^2 \\ |y| = R\cos^n\theta_0 \tan\theta + bk \end{cases} \quad 0° \le \theta \le \theta_0 < 90° ; \quad k = 0,1,2,3,\dots ,$$

e composta da infiniti segmenti.
Seguono due altri esempi.

Esempio 3. Se $n = 2$; $R = 2$; $a = 0$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta_0 = 30°$, il sistema che ne consegue:

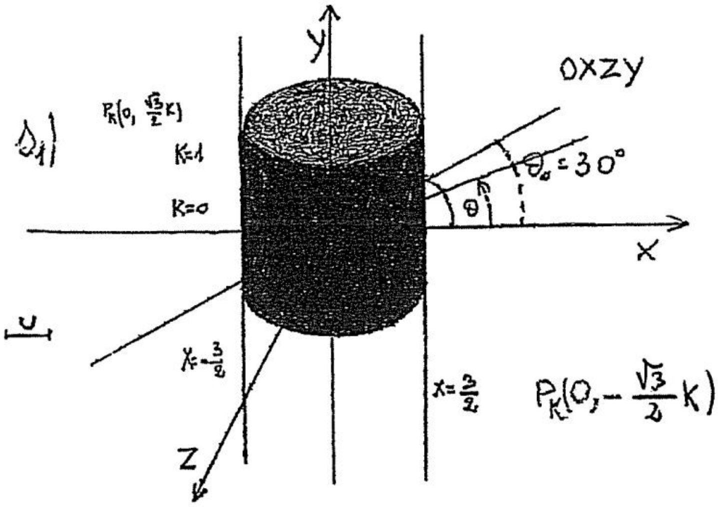
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ |y| = \frac{3}{2}\tan\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}k \end{cases} \quad 0° \le \theta \le 30°; \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

avrà come diagramma una superficie ottenuta dalla rotazione di due rette modulari attorno all'asse delle y, di mezzo giro, per i valori $k = 0,1,2,3,\dots$

Esattamente, si tratta di una superficie simmetrica rispetto ai piani cartesiani del sistema $oxzy$, formata da infinite superfici laterali cilindriche di raggio $3/2$, tutte uguali tra loro ma non uguali alla superficie laterale cilindrica che si ha quando $k = 0$.

Per ogni valore di $k \ne 0$ avrò due superfici laterali cilindriche.

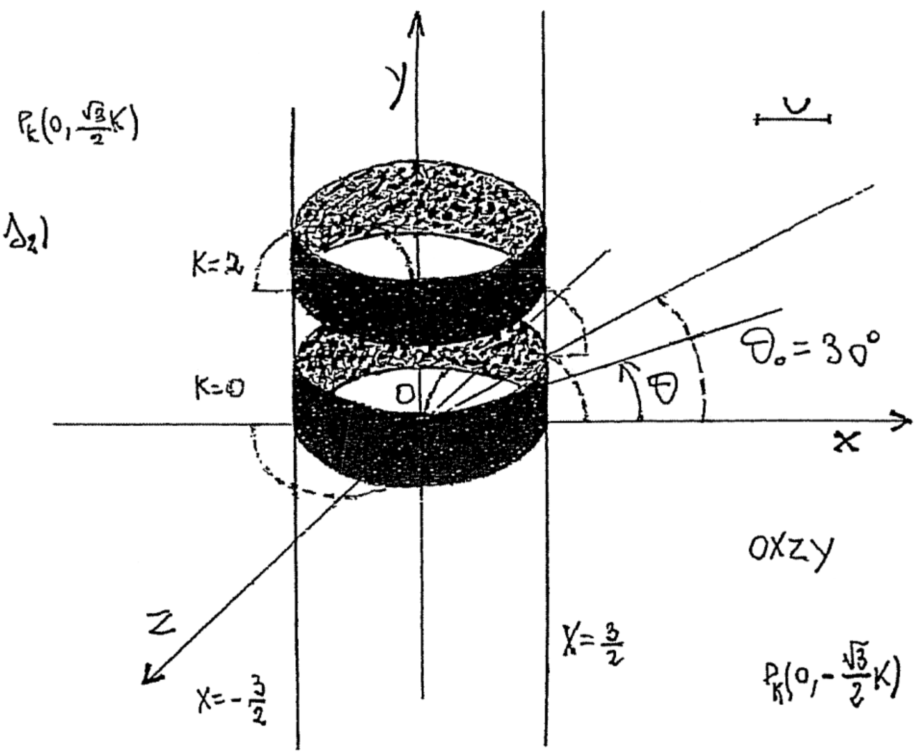
Segue la figura s_1:



Esempio 2. L'esempio 2 è un caso particolare dell'esempio 1.
Il sistema del caso s_2 è quello del sistema del caso s_1, quando però $k = 0, 2, 4, 6, \ldots$
Il diagramma del sistema nello spazio $oxzy$ sarà quello rappresentato dalle infinite superfici laterali cilindriche di raggio $r = \frac{3}{2}$, separate una dall'altra e dette "anelli".
Il diagramma del sistema è stato limitato ai valori di

$$y = \frac{3}{2}\tan\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}k \begin{cases} \textit{quando } k = 2 \ (\textit{un anello}) \\ \textit{quando } k = 0 \ ({}^{1}/_{2} \textit{ anello}) \end{cases},$$

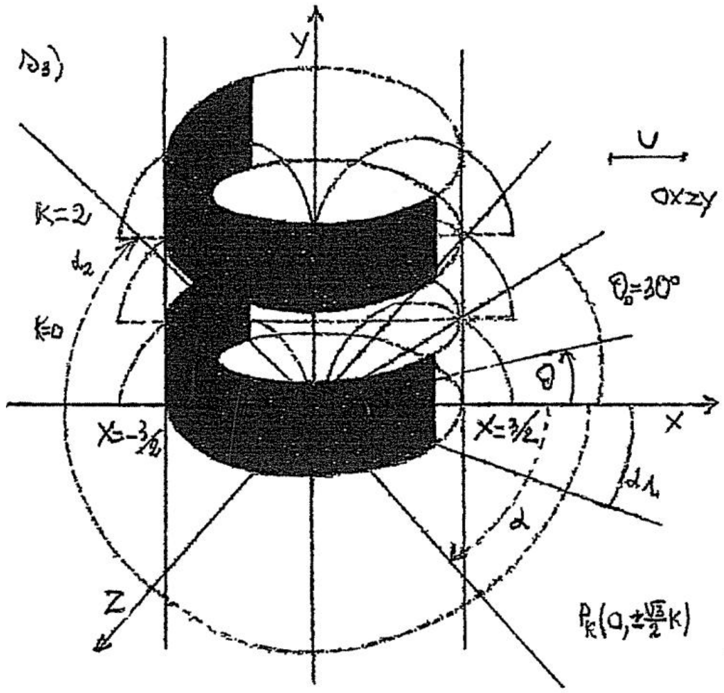
anche se gli anelli sono infiniti (uno si e l'altro no).
Il grafico è s_2:



Ripreso il sistema dell'Esempio 1

che posso scrivere anche così: $\begin{cases} x &= \dfrac{3}{2}\cos\alpha \\ z &= \dfrac{3}{2}\sin\alpha \\ |y| &= \dfrac{3}{2}\tan\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}k \end{cases}$ $\quad 0° \le \theta \le 30°$, $0° \le \alpha < 360°$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

se lo considero quando $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ con $0° \le \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 < 360°$, $k = 0, 2, 4, 6, \dots$, avrò la seguente rappresentazione geometrica s_3:



Come per l'Esempio 2, il diagramma è stato limitato ad un anello per $k = 2$ ed a $\frac{1}{2}$ anello per $k = 0$ anche se gli anelli sono infiniti (uno si e l'altro no).

Riconsideriamo la curva dell'esempio 2. Sia A un arco dei $2N$ archi uguali $(N \ge 2)$ in cui divido una qualunque circonferenza della s_2 ,

ossia $A = \dfrac{180°}{N}$; se fisso gli estremi di questi archi:

$$\alpha_{2h} = 2h\frac{180°}{N}; \qquad \alpha_{2h+1} = (2h+1)\frac{180°}{N} \qquad h = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1; \qquad N \ge 2$$

(tutti presi in senso orario e a partire dal piano $z = 0$) e se considero i valori di α dell'intervallo $\alpha_{2h} \le \alpha \le \alpha_{2h+1}$,

il sistema:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{3}{2}\cos\alpha \\ z &= \dfrac{3}{2}\sin\alpha \\ |y| &= \dfrac{3}{2}\tan\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k = 0, 2, 4, 6, \dots; \quad 0° \le \theta \le 30° \\ 2h\dfrac{180°}{N} \le \alpha \le (2h+1)\dfrac{180°}{N} \\ h = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad (N \ge 2) \end{array}$$

rappresenta:

Per un valore di θ ed un valore di k,
N archi dei $2N$ archi uguali (uno si e l'altro no) in cui divido entrambe le circonferenze che sono la intersezione della superficie cilindrica indefinita con due piani di equazione $|y| = \frac{3}{2}\tan\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}k$.

Per i valori di θ ed un valore di k,
N superfici delle $2N$ superfici uguali (una si e l'altra no) in cui divido un anello.

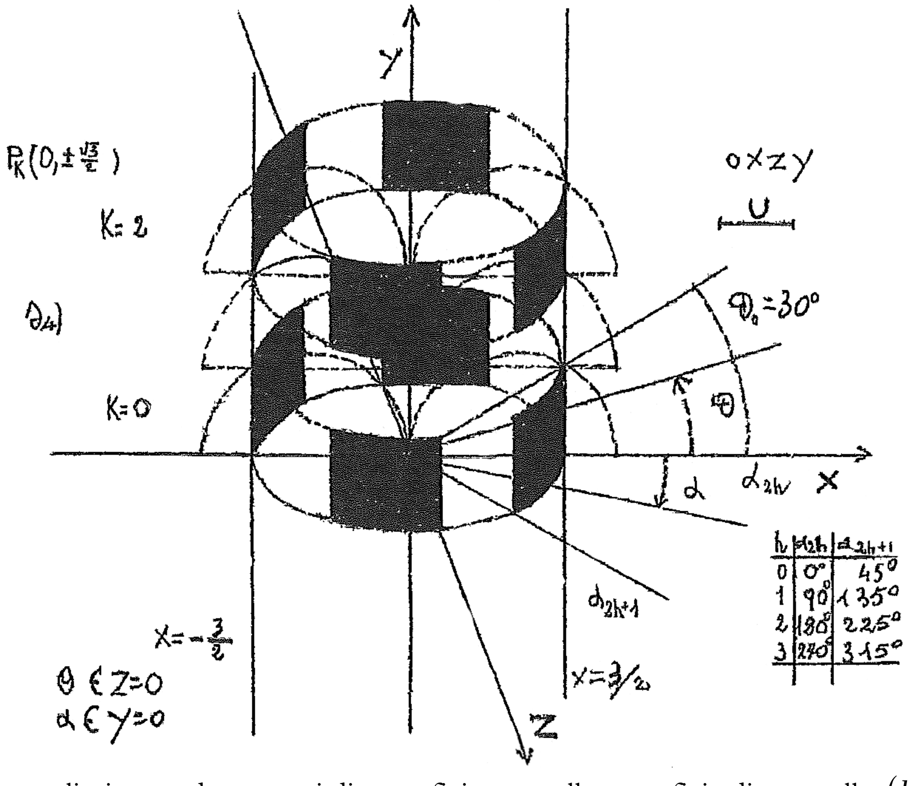
Per i valori di θ ed i valori di k,
N superfici delle $2N$ superfici uguali (una si e l'altra no) in cui divido tutti gli anelli.

Facciamo un esempio: se considero il sistema per $N = 4$ si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\cos\alpha \\ z = \frac{3}{2}\sin\alpha \\ |y| = \frac{3}{2}\tan\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}k \end{cases}$$

$$k = 0, 2, 4, 6, \dots$$
$$0° \le \theta \le 30°$$
$$90°h \le \alpha \le (2h+1)45°$$
$$h = 0, 1, 2, 3.$$

e quindi la sua rappresentazione geometrica s_4:



Il diagramma è stato limitato a due gruppi di superfici, uno sulla superficie di un anello $(k = 2)$ e l'altro su mezzo anello $(k = 0)$ anche se i gruppi di superfici rappresentati dal sistema sono infiniti, uno per ogni anello.

Il piano di simmetria della superficie, rappresentata dal sistema, è $y = 0$.

A ripartire dalla famiglia dei segmenti paralleli all'asse delle y, rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} |y| = R\cos^n\theta_0 \tan\theta + bk \\ |x| = R\cos^n\theta_0 + ak \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0° \le \theta \le \theta_0 < 90° \\ k = 0,1,2,3,\ldots \end{array},$$

se la riconsideriamo per i valori di:

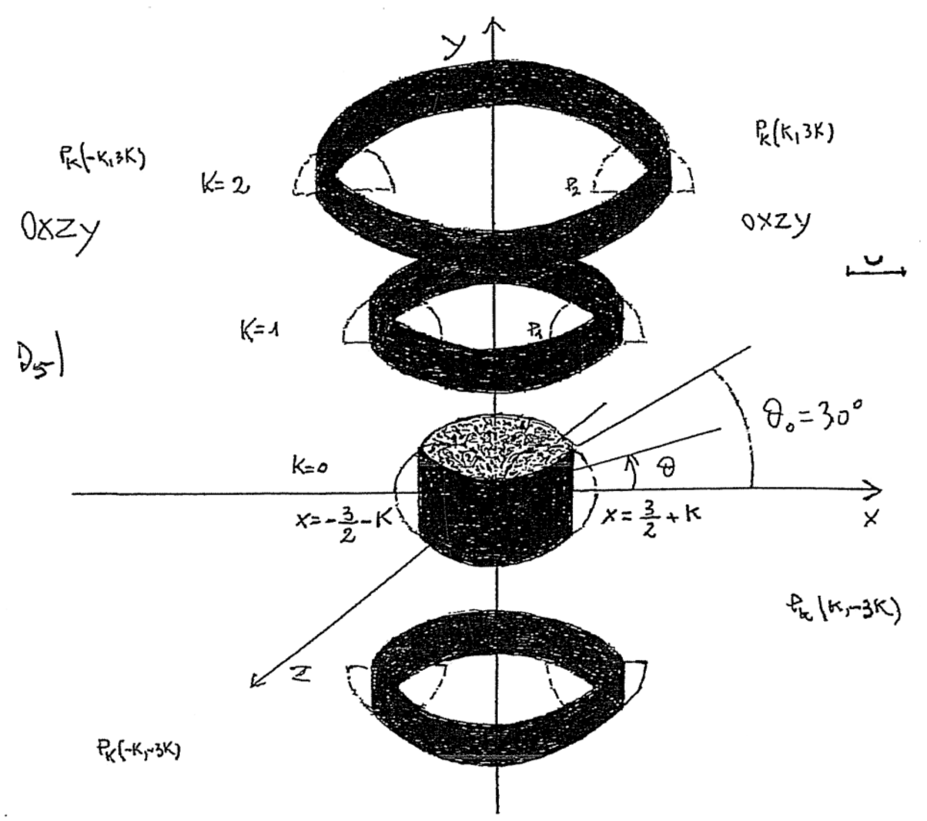
$\theta_0 = 30°$; $R = 2$; $n = 2$; $a = 1$; $b = 3$,

ritroverò il già noto sistema: $\begin{cases} |y| = \dfrac{3}{2}\tan\theta + 3k \\ |x| = \dfrac{3}{2} + k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0° \le \theta \le 30° \\ k = 0,1,2,3,\ldots; \end{array}$

Se poi faccio ruotare questa famiglia di segmenti di $\frac{1}{2}$ giro attorno all'asse delle y, avrò infinite superfici laterali cilindriche (anelli), luogo geometrico dei punti dello spazio $oxzy$ le cui coordinate verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \left(\dfrac{3}{2} + k\right)^2 \\ |y| = \dfrac{3}{2}\tan\theta + 3k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0° \le \theta \le 30° \\ k = 0,1,2,3,\ldots \end{array}$$

Segue la figura s_5 :



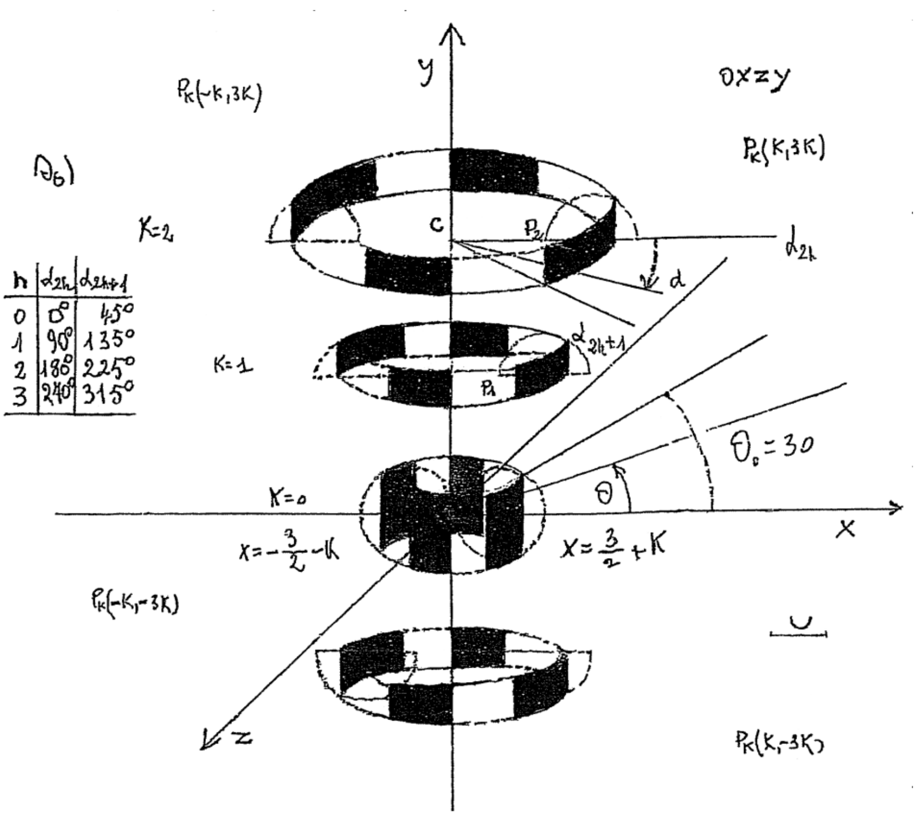
Scrivo il sistema della s_5 in quest'altro modo:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{3}{2}+k\right)\cos\alpha \\ z = \left(\dfrac{3}{2}+k\right)\sin\alpha \\ |y| = \dfrac{3}{2}\tan\theta + 3k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0° \le \theta \le 30° \,; \quad k = 0,1,2,3,\dots \\ 0° \le \alpha < 360° \end{array}$$

Se poi lo considero quando $2h\dfrac{180°}{N} \le \alpha \le (2h+1)\dfrac{180°}{N}$ con $h = 0,1,2,3$.

$(N = 4)$, il suo diagramma nello spazio sarà una superficie di rotazione di segmenti, formata da infiniti gruppi di superfici $(N = 4)$, uno per ogni anello.

Vedere la figura s_6 .



Il sistema della s_6 potrà essere generalizzato come appresso:

$$\begin{cases} x = \left(R\cos^n\theta_0 + ak\right)\cos\alpha \\ z = \left(R\cos^n\theta_0 + ak\right)\sin\alpha \\ |y| = R\cos^n\theta_0 \tan\theta + bk \end{cases}$$

Con $0° \leq \theta \leq \theta_0 < 90°$; $k = 0,1,2,3,\dots$; $a \geq 0,\ b \geq 0$ (non contemporaneamente uguali a zero); $n \geq 1$ (intero); $R > 0$;

quando $2h\dfrac{180°}{N} \leq \alpha \leq (2h+1)\dfrac{180°}{N}$, $h = 0,1,2,3,\dots,N-1$, $(N \geq 2)$.

Il suo diagramma nello spazio sarà una superficie di rotazione di infiniti segmenti, formata da infiniti gruppi di superfici $(N \geq 2)$, uno per ogni anello.

Sarà grazie ad una oculata scelta di valori dei parametri che il sistema, di conseguenza, potrà rappresentare nello spazio "superfici di rotazione di segmenti" piuttosto complesse e/o particolari.