

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 u'(x) + u(x) = 3 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione data è lineare; procedendo come al solito si ha

$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + k_1$$

e

$$\int \frac{3}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = 3e^{-\frac{1}{x}} + k_2.$$

Ne segue che la soluzione generale è data da

$$u(x) = ce^{\frac{1}{x}} + 3.$$

In definitiva

$$1 = u(1) = ce + 3$$

da cui

$$c = -\frac{2}{e}.$$

La soluzione è quindi

$$u(x) = -2e^{\frac{1-x}{x}} + 3.$$