Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) = -16\sin(2x) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 4. \end{cases}$$

Calcolare $u''(0)$ e $u\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

SOLUZIONE. Quanto alla prima richiesta si ha

$$u''(0) = -2u'(0) = -8.$$

Risolviamo ora l'equazione; l'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$; l'integrale generale dell'omogenea associata è dunque dato da

$$\bar{u}(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

Osserviamo ora che 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, quindi cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$u_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Si ha

$$u_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$$

e

$$u_p''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x).$$

Inserendo il tutto nell'equazione data si ottiene, a conti fatti, il seguente sistema

$$\begin{cases} -4a + 4b = 0 \\ 4a + 4b = 16 \end{cases}$$

da cui $a = b = 2$. La soluzione generale è quindi data da

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + 2\cos(2x) + 2\sin(2x).$$

La condizione $u(0) = 0$ dà $c_1 + c_2 + 2 = 0$; poi si ha

$$u'(x) = -2c_2 e^{-2x} - 4\sin(2x) + 4\cos(2x)$$

da cui $u'(0) = 4$ equivale a $-2c_2 + 4 = 4$. Dunque $c_2 = 0$ e $c_1 = -2$. La soluzione finale è

$$u(x) = -2 + 2\cos(2x) + 2\sin(2x)$$

da cui $u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4$.