*Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(x) + 49u(x) = 1 \\ u(0) = \frac{1}{49} \\ u'(0) = 7. \end{cases}$$

*Calcolare $u''(0)$ e $49u(\pi) - u'(\pi)$.*

SOLUZIONE. Per il calcolo di $u''(0)$ si ha

$$u''(0) = 1 - 49u(0) = 0.$$

Invece, per la seconda richiesta, occorre risolvere l'equazione. L'equazione caratteristica è data dall'equazione

$$\lambda^2 + 49 = 0$$

che ha le due soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 7i$; ne segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$\bar{u}(x) = c_1 \cos(7x) + c_2 \sin(7x).$$

Il termine noto è di tipo polinomiale, di grado 0; cerchiamo quindi, ad esempio, una soluzione particolare costante. Si osserva immediatamente che l'unica soluzione particolare costante è data da

$$u_p(x) = \frac{1}{49}.$$

L'integrale generale è quindi dato da

$$u(x) = c_1 \cos(7x) + c_2 \sin(7x) + \frac{1}{49}$$

da cui

$$u(0) = \frac{1}{49} \Longleftrightarrow c_1 + \frac{1}{49} = \frac{1}{49}$$

e dunque $c_1 = 0$. Per il calcolo di $c_2$ si ha anzitutto

$$u'(x) = 7c_2 \cos(7x)$$

da cui

$$u'(0) = 7 \Longleftrightarrow 7c_2 = 7$$

che restituisce $c_2 = 1$. La soluzione richiesta è dunque data da

$$u(x) = \sin(7x) + \frac{1}{49}$$

con

$$u'(x) = 7\cos(7x).$$

Dunque

$$49u(\pi) - u'(\pi) = 49\frac{1}{49} - 7\cos(7\pi) = 8.$$