Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

dire se è continua in $(0,0)$, *e dimostrare che non è ivi differenziabile.*

SOLUZIONE. Si ha

$$0 \leq \left| \frac{2x^2y - xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|xy||2x-y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)|2x-y|}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|2x-y| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Quindi f è continua in $(0,0)$.
Andiamo a calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$; si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Se f fosse differenziabile, allora il differenziale dovrebbe essere l'applicazione nulla; ma allora dovrebbe essere

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} \frac{\frac{2x^2y - xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ovvero

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} \frac{2x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Ma lungo $y = mx$ si ha

$$\frac{2x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2m - m^2}{(1+m^2)^{3/2}},$$

per cui il limite non esiste ed f non è differenziabile in $(0,0)$.