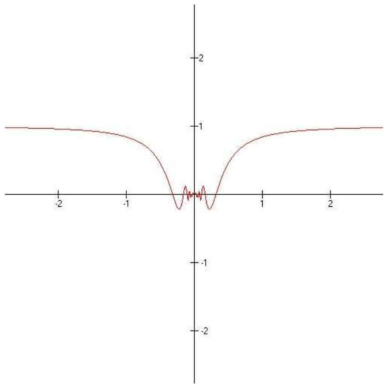
Discutere la derivabilità della seguenti funzione definita su tutto $\mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Dal grafico



si intuisce che f è continua anche in $x = 0$; in effetti

$$0 \leq |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|.$$

Dal Teorema del confronto per i limiti, si ha che

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La derivata prima in $x = 0$ pare non esistere; in effetti

$$\lim_{h \to 0} \frac{h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

non esiste. Dunque, la funzione data non è derivabile in $x = 0$.